MATEMATICĂ

GEOMETRIE ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

Cuprins

Glosar

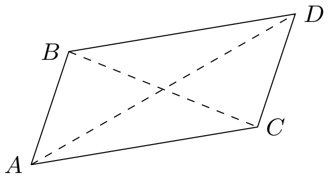
1. Vectori

1.1. Segmente orientate. Vectori în plan

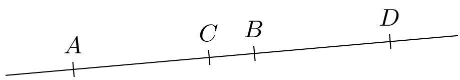
Segmente orientate

Definiţie. Perechea ordonată de puncte (A, B) se numeşte **segment orientat** şi se notează cu $\overline{AB}$.
Definiţie. Segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt **echipolente** (se notează cu $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), dacă mijlocul segmentului $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.
Observaţie. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci există o translaţie care transformă segmentul $\overline{AB}$ în segmentul $\overline{CD}$.
Proprietăţi. Pe mulţimea segmentelor orientate relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă:

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *reflexivă*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *simetrică*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ şi $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, atunci $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ ($\sim$ este *tranzitivă*).



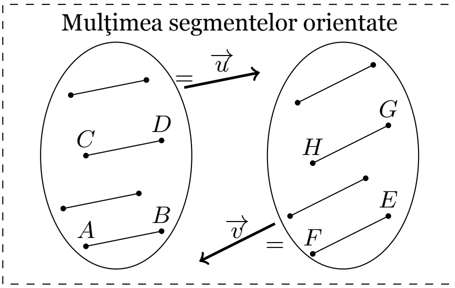
$\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente dacă şi numai dacă $ABDC$ este paralelogram sau punctele A, B, C, D sunt coliniare şi mijlocul lui $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.



Vectori

Definiţie. Se numeşte **vector** mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment dat.
Notaţie. Vectorul determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$ (sau cu litere mici): $\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} \mid \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$.
Observaţie. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dacă $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci spunem că segmentul $\overline{AB}$ (sau $\overline{CD}$) este un **reprezentant** al vectorului $\overrightarrow{u}$.
Definiţie. **Lungimea** (sau **modulul**) unui vector este lungimea oricărui reprezentant al său şi se notează cu $|\overrightarrow{u}|$.
Definiţie. Vectorul de lungime nulă $\overrightarrow{AA}$ se numeşte **vectorul nul** şi se notează $\vec{0}$.

Definiţie. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt **egali** ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), dacă segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente.
Observaţie. Doi vectori sunt egali dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi sens.
Teoremă. (*Existenţa reprezentantului cu origine dată*) Pentru orice vector $\overrightarrow{u}$ şi orice punct M, există un unic segment orientat $\overline{MM'}$ pentru care $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$.
Consecinţă. Dacă $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, atunci $A = B$.



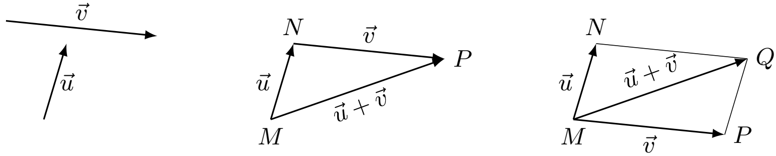
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots$,
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \ldots$,
$\overline{CD}$ este un reprezentant al vectorului $\overrightarrow{u}$,
$\overline{EF}$ este un reprezentant al lui $\overrightarrow{v}$,
$\overline{AB} = \overline{CD}$.

1.2. Operaţii cu vectori

Suma a doi vectori

Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ se defineşte în felul următor.

- (*Regula triunghiului*): fie M un punct oarecare, atunci există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{v}$. Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este vectorul $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MP}$.
- (*Regula paralelogramului*): dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ nu sunt coliniare, fie M un punct oarecare; atunci există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{v}$; se construieşte paralelogramul $MNQP$. Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este vectorul $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MQ}$.



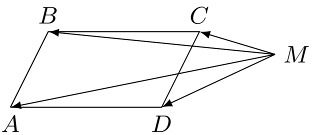
Regula triunghiului Regula paralelogramului

Proprietăţile adunării vectorilor

Definiţie. Opusul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
Proprietăţi. Pentru orice vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

- *asociativitate*: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- *comutativitate*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- există element neutru $\left(\vec{0}\right)$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
- orice vector $\vec{a}$ are un opus $(-\vec{a})$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

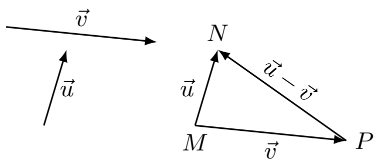
Problemă. *Fie M un punct oarecare situat în planul paralelogramului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.*
S. În paralelogramul $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \\
&= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.
\end{aligned}$$

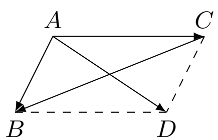
Scăderea vectorilor

Diferenţa a doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ se defineşte prin relaţia $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ şi se construieşte în felul următor: fie M un punct oarecare; există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ şi $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$. Atunci $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PN}$.



Pentru orice puncte M, N, P
$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.

Problemă. *În triunghiul ABC modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ este egal cu modulul vectorului $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic!*
S. Se construieşte paralelogramul $ABCD$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, deci $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$.



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, deci $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = CB$.
$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Rightarrow AD = BC$, deci paralelogramul $ABCD$ este un dreptunghi; astfel, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

Înmulţirea unui vector cu un scalar

Definiţie. Produsul dintre vectorul $\vec{u} \neq \vec{0}$ şi numărul real $\alpha \in \mathbb{R}^*$ este vectorul notat $\alpha\vec{u}$ care

- are aceiaşi direcţie cu vectorul deînmulţit $\vec{u}$;
- dacă $\alpha > 0$, atunci are acelaşi sens, dacă $\alpha < 0$, are sens opus cu $\vec{u}$;
- are modululul egal cu $|\alpha| \cdot |\vec{u}|$.

Dacă$\vec{u} = \vec{0}$ sau $\alpha = 0$, atunci $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Proprietăţi

Proprietăţi. Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$ vectori şi α, β numere reale oarecare, atunci

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
- $(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$.

Problemă. *În triunghiul ABC fie M mijlocul segmentului $[BC]$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.*

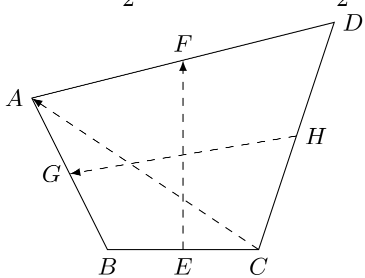
S. Conform regulei triunghiului,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}}_{=\vec{0}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \text{deci}$$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Problemă. *Fie $ABCD$ un patrulater şi fie E, F, G, H mijloacele laturilor $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[CD]$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CA}$.*

S. G este mijlocul lui $[AB]$, deci $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Analog, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \\
&(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}) + (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}) = \\
&(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AG}) = \\
&\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \\
&\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = \\
&\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \overrightarrow{CA}.
\end{aligned}$$

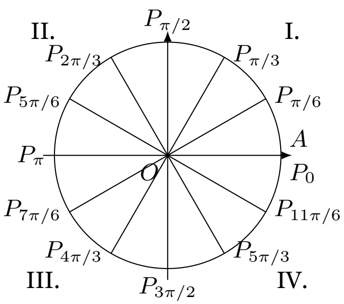
3. Trigonometrie

3.1. Elementele trigonometriei

Măsura unghiurilor în radiani

Definiţie. Raportul dintre semiperimetrul şi raza unui cerc este constant şi se notează prin π (valoarea aproximativă este $\pi \approx 3{,}1415$).
Definiţie. Măsura unui unghi la centrul unui cerc cuprinzând un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului este de 1 **radian**.
Observaţie. Dacă α este măsura unui unghi în grade iar x_r este măsura unghiului în radiani, atunci este adevărată relaţia

$$\frac{\alpha}{x_r} = \frac{180}{\pi}.$$

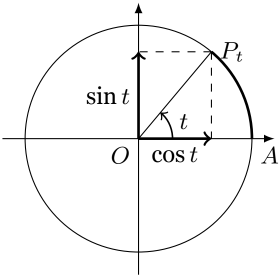


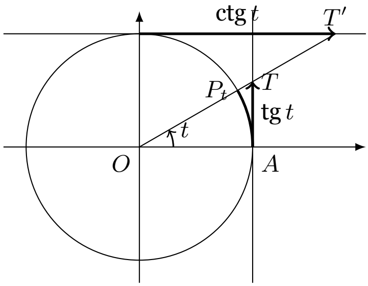
Cercul trigonometric

Definiţie. Fie xOy un reper cartezian. Cercul cu centrul în O şi cu raza egală cu 1 pe care este indicat **sensul trigonometric direct** (invers acelor ceasornicului) se numeşte **cercul trigonometric**.
Notaţie. Fie $t \in \mathbb{R}$ un număr real. Atunci există un unic punct P_t pe cercul trigonometric pentru care $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Sinusul şi cosinusul

Fie t un număr real şi P_t punctul pentru care $m(\widehat{AOP_t}) = t$.
Definiţie. Ordinata punctului P_t se numeşte **sinusul** numărului real t şi se notează prin $\sin t$.
Definiţie. Abscisa punctului P_t se numeşte **cosinusul** numărului real t şi se notează prin $\cos t$.





Tangenta şi cotangenta

Definiţie. Fie d_{tg} dreapta verticală de ecuaţie $x = 1$ şi fie d_{ctg} dreapta orizontală de ecuaţie $y = 1$.
Definiţie. Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ şi T intersecţia dreptelor OP_t şi d_{tg}. Ordinata punctului T se numeşte **tangenta** numărului t şi se notează prin $\text{tg}\, t$.
Definiţie. Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi fie T' intersecţia dreptelor OP_t şi d_{ctg}. Abscisa punctului T' se numeşte **cotangenta** numărului real t şi se notează prin $\text{ctg}\, t$.

Valori remarcabile

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\text{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\text{ctg}\, x$	$\mid$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mid$

Reducerea la primul cadran

$x \in C_2$	$x \in C_3$	$x \in C_4$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$	$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$	$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\text{tg}\, x = -\text{tg}\,(\pi - x)$	$\text{tg}\, x = \text{tg}\,(x - \pi)$	$\text{tg}\, x = -\text{tg}\,(2\pi - x)$
$\text{ctg}\, x = -\text{ctg}\,(\pi - x)$	$\text{ctg}\, x = \text{ctg}\,(x - \pi)$	$\text{ctg}\, x = -\text{ctg}\,(2\pi - x)$

Semnul funcţiilor trigonometrice

x	0	C_1	$\frac{\pi}{2}$	C_2	π	C_3	$\frac{3\pi}{2}$	C_4	2π
$\sin x$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert$

Monotonia funcţiilor trigonometrice

x	0	C_1	$\frac{\pi}{2}$	C_2	π	C_3	$\frac{3\pi}{2}$	C_4	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$_{-\infty}\vert$

Formule trigonometrice fundamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (*formula fundamentală*)		$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

Formule trigonometrice pentru sumă şi diferenţă

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

Formule pentru unghi dublu, unghi triplu

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \qquad \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos(3x) = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{tg}(3x) = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} x} \qquad \operatorname{ctg}(3x) = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \cdot \operatorname{ctg} x}{3 \cdot \operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

Formula unghiului pe jumătate

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$= \operatorname{arctg}\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \alpha-\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}, \text{ astfel } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2.3. Inegalităţi şi limite

Fie (a_n), (b_n), (c_n) şiruri, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Teoremă. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi $|a_n - \alpha| \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.
Teoremă. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi $a_n \geq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Teoremă. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Teoremă. Dacă (a_n), (b_n) sunt convergente şi $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Teoremă. Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Problemă. *Să se calculeze:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n}$.

S. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sin k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+k} < \frac{1}{n^2}$, astfel
$$0 \leq \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n} < n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$
de unde $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n} = 0.$$

Problemă. *Să se calculeze:* $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

S. Demonstrăm (prin metoda inducţiei matematice) că
$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \forall n \geq 2.$$
I. $n = 2$: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{2}$.

II. Presupunând că inegalitatea este adevărată pentru k, demonstrăm că este adevărată şi pentru $k+1$:
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$
Din $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ şi $a_n > \sqrt{n}$, $\forall n \geq 2$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.4. Convergenţă, monotonie, mărginire

Teoremă. Dacă şirul (a_n) este convergent, atunci (a_n) este mărginit.
Teoremă. Dacă şirul (a_n) este mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Exemplu. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{4n+3} \sin\dfrac{1}{n} = 0$, pentru că $a_n = \dfrac{2n}{4n+3} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow (a_n)$ este mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{n} = \sin 0 = 0$.

Teorema lui Weierstrass

Teoremă. Orice şir care este monoton şi mărginit este convergent.

Problemă. *Să se demonstreze că şirul* $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$, $\forall n \geq 1$ *este convergent şi să se determine limita şirului.*
S. Din primele câţiva termeni se pare că şirul este crescător.

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_n + 12} > a_n \Leftrightarrow -a_n^2 + a_n + 12 > 0 \Leftrightarrow a_n \in (-3, 4),$$

deci pentru a arăta monotonia şirului, mai întâi trebuie demonstrat că $a_n < 4$, $\forall n \geq 1$- demonstraţia o facem cu metoda inducţiei matematice:
I. $n = 1$: $a_1 = 2 < 4$.
II. Pesupunând că $a_k < 4$, demonstrăm că $a_{k+1} < 4$:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 12} < \sqrt{4 + 12} = 4.$$

Astfel, $a_n < 4$ şi de aici (a_n) este strict crescător.
Conform teormei lui Weierstrass şirul (a_n) este convergent- fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 12} \Rightarrow l = \sqrt{l + 12} \Rightarrow l_1 = -3,\ l_2 = 4.$$

Deoarece $a_n > 0$, limita nu poate fi $l_1 = -3$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_2 = 4$.

Numărul e

Teoremă. Şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ este convergent şi limita şirului este numărul e .
Teoremă. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} = e$.

3. Limite de funcţii

3.1. Limita unei funcţii

Definiţie. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ are **limita** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru oricare vecinătate V_l a lui l există o vecinătate U_{x_0} a lui x_0 astfel încât, $\forall x \in U^*_{x_0} \cap D \Rightarrow f(x) \in V_l$.
Notaţie. Dacă func tia $f : D \to \mathbb{R}$ are limita l în $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci se scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
Teoremă. *(Definiţia limitei după Heine)* Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Afirmaţiile următoare sunt echivalente:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$,
- $\forall (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Problemă. *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$!*
S. Fie şirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(x'_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$.
Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x'_n = 0$ és

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1,$$

deci (din definiţia după Heine) f nu are limită în punctul x_0.

Limită în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$

Definiţie. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a. î. dacă } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), x \neq x_0 \text{ atunci } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Definiţie. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a. î. dacă } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), x \neq x_0 \text{ atunci } f(x) > \varepsilon.$$

Definiţie. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a. î. dacă } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), x \neq x_0 \text{ atunci } f(x) < -\varepsilon.$$

Problemă. *Să se arate că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty$!*

S. Trebuie arătat că $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ a. î. dacă $|x| < \delta$, $x \neq 0$, atunci $f(x) > \varepsilon$.

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right).$$

Dacă $\delta = \min\left\{\left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|, \left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|\right\}$, atunci $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

Limită în $+\infty$

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x > \delta(\varepsilon)$ atunci $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x > \delta(\varepsilon)$ atunci $f(x) > \varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x > \delta(\varepsilon)$, atunci $f(x) < -\varepsilon$.

Limită în $-\infty$

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x < -\delta(\varepsilon)$ atunci $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x < -\delta(\varepsilon)$ atunci $f(x) > \varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $x < -\delta(\varepsilon)$, atunci $f(x) < -\varepsilon$.

Limite laterale

Definiţie. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ are **limita laterală la stânga** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru oricare vecinătate V_l a lui l există o vecinătate U_{x_0} a lui x_0 astfel încât $\forall x \in U^*_{x_0} \cap D$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V_l$.

Notaţie. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ sau $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$.

Teoremă. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow$

$\forall(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in D$, $x_n < x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Observaţie. În mod analog se defineşte limita laterală la dreapta.

Teoremă. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii D. Funcţia f are limită în punctul x_0 dacă şi numai dacă există limitele laterale la stânga şi la dreapta şi acestea sunt egale.

5.4. Derivatele funcţiilor elementare

Funcţia	Derivata funcţiei	Domeniul derivatei
$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \log_a x, {}_{a \neq 1}^{a>0,}$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$f(x) = a^x, {}_{a \neq 1}^{a>0,}$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$