

# MATEMATICĂ

GEOMETRIE ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND  
CERINTELOR DE BACALAUREAT 2016

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

# Cuprins

## GEOMETRIE

1. Vectori . . . . .	1
1.1. Segmente orientate. Vectori în plan . . . . .	1
1.2. Operații cu vectori . . . . .	2
1.3. Vectori coliniari . . . . .	5
1.4. Vectori de poziție . . . . .	6
1.5. Drepte paralele, concurente. Colinearitate . . . . .	7
1.6. Produsul scalar . . . . .	10
2. Geometrie analitică . . . . .	13
3. Trigonometrie . . . . .	19
3.1. Elementele trigonometriei . . . . .	19
3.2. Ecuații trigonometrice . . . . .	24
3.3. Aplicații ale trigonometriei în geometrie . . . . .	28

## ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Numere reale, mulțimi reale . . . . .	30
2. Șiruri de numere reale . . . . .	32
2.1. Șiruri reale . . . . .	32
2.2. Operații cu șiruri reale . . . . .	33
2.3. Inegalități și limite . . . . .	35
2.4. Convergență, monotonie, mărginire . . . . .	36
2.5. Subșiruri . . . . .	37
2.6. Limite remarcabile . . . . .	37
2.7. Aplicații . . . . .	38
3. Limite de funcții . . . . .	40
3.1. Limita unei funcții . . . . .	40
3.2. Operații cu limite de funcții . . . . .	42
3.3. Proprietățile limitelor de funcții . . . . .	43

3.4. Limite remarcabile . . . . .	44
4. Funcții continue . . . . .	46
4.1. Continuitatea funcțiilor . . . . .	46
4.2. Operații cu funcții continue . . . . .	48
4.3. Continuitate și proprietatea lui Darboux . . . . .	49
5. Funcții derivabile . . . . .	50
5.1. Definiția derivatei . . . . .	50
5.2. Interpretarea geometrică a derivatei . . . . .	52
5.3. Operații cu funcții derivabile . . . . .	53
5.4. Derivatele funcțiilor elementare . . . . .	54
5.5. Derivatele funcțiilor compuse . . . . .	55
5.6. Derivate de ordin superior . . . . .	56
5.7. Teoreme de medii . . . . .	57
5.7.1. Teorema lui Fermat . . . . .	57
5.7.2. Teorema lui Rolle . . . . .	58
5.7.3. Teorema lui Lagrange . . . . .	60
5.7.4. Regula lui L'Hospital . . . . .	62
5.8. Reprezentarea grafică a funcțiilor . . . . .	63
5.8.1. Asimptote . . . . .	63
5.8.2. Convexitate, concavitate . . . . .	64
5.8.3. Reprezentarea grafică a funcțiilor . . . . .	65
6. Integrala nedefinită . . . . .	67
6.1. Primitive. Integrala nedefinită . . . . .	67
6.2. Funcții primitivabile . . . . .	69
6.3. Integrarea prin părți . . . . .	71
6.4. Prima metodă de schimbare de variabilă . . . . .	72
6.5. A doua metodă de schimbare de variabilă . . . . .	74
6.6. Integrarea funcțiilor raționale . . . . .	75
6.6.1. Substituțiile lui Euler . . . . .	79
6.6.2. Integrarea unor funcții trigonometrice . . . . .	80
7. Integrala definită . . . . .	81
7.1. Funcții integrabile Riemann . . . . .	81
7.2. Proprietățile funcțiilor integrabile . . . . .	84
7.3. Integrarea prin părți . . . . .	85
7.4. Prima metodă de schimbare de variabilă . . . . .	86
7.5. A doua metodă de schimbare de variabilă . . . . .	87
7.6. Formula de medie . . . . .	88
7.7. Teorema fundamentală . . . . .	89
7.8. Aplicații ale integralei definite . . . . .	90

# Glosar

- a doua metodă de schimbare de variabilă, 74, 87
- abscisă, 13
- asimptotă
  - oblică, 63
  - orizontală, 63
  - verticală, 63
- cerc trigonometric, 19
- corp de rotație, 91
  - volumul, 91
- derivata, 50
  - de ordin superior, 56
  - laterală, 50
- discontinuitate, 47
  - de prima speță, 47
  - de speță a doua, 47
- diviziune, 81
  - echidistantă, 81
  - norma, 81
  - puncte de diviziune, 81
- dreapta
  - ecuația explicită, 16
  - ecuația generală, 16
  - panta, 15
- dreapta lui Euler, 8
- $e$ , 36
- formula
  - fundamentală a trigonometriei, 21
- formula de medie, 88
- formula lui Heron, 29
- funcție
  - primitivabilă, 67
  - funcție continuă
    - într-un punct, 46
    - la dreapta, 46
    - la stânga, 46
    - pe o mulțime, 46
  - funcție derivabilă, 50
  - funcție discontinuă, 47
  - funcție integrabilă, 82
  - funcții trigonometrice
    - cosinus, 19
    - cotangenta, 20
    - sinus, 19
    - tangenta, 20
- inegalitatea Bernoulli, 58
- integrala definită, 82
- integrala nedefinită, 67
- integrarea prin părți, 71, 85
- limita laterală unei funcții, 41
- limita unei funcții, 40
- limita unui șir, 32
- lungimea
  - bisectoarei, 12
  - mediane, 12
- mulțime
  - finită, 30
  - mărginită inferior, 30

mărginită superior, 30  
 majorant, 30  
 minorant, 30  
 punct de acumulare, 31  
 punct izolat, 31

ordonată, 13

$\pi$ , 19

prima metodă de schimbare de variabilă,  
     72, 86

primitiv a unei funcții, 67

produs scalar, 10

proprietatea lui Darboux, 49

punct de întoarcere, 51

punct de inflexiune, 64

punct de maxim local, 57

punct de minim local, 57

punct unghiular, 51

puncte critice, 57

puncte de extrem, 57

puncte intermediare, 81

radian, 19

reper
 

- cartezian, 13
- originea reperului, 13
- ortonormat, 13
- vector unitate, 13

segment orientat, 1
 

- echipolență, 1

semiaxa pozitivă, negativă, 13

sens trigonometric, 19

subșir, 37

subgrafic, 91
 

- aria, 91

substituția universală, 80

substituțiile lui Euler, 79

suma Riemann, 81

șir, 32
 

- câțul a două șiruri, 33
- convergent, 32
- crescător, 32
- descrescător, 32
- divergent, 32
- limita câțului, 33
- limita produsului, 33
- limita sumei, 33
- mărginit, 32
- periodic, 32
- produsul a două șiruri, 33
- suma a două șiruri, 33

șirul lui Rolle, 59

teorema
 

- lui Pappus, 6
- bisectoarei, 7
- cosinusului, 12, 29
- lui Cesaro, 37
- lui Ceva, 9
- lui Fermat, 57
- lui Lagrange, 60
- lui Menelaus, 9
- lui Rolle, 58
- lui Stewart, 12
- lui Sylvester, 8
- lui Thales, 7
  - reciproca, 7
- lui Weierstrass, 36
- sinusurilor, 29
- tangentelor, 29

vecinătate, 31

vector, 1
 

- de poziție, 6
- lungimea, 1
- modulul, 1
- nul, 1
- opus, 3
- reprezentant, 1

vector de poziție

centrul cercului înscris, 7

centrul de greutate, 6

mijlocul unui segment, 6

vectori

coliniari, 5

diferența, 3

perpendiculari, 10

suma, 2

unghiul a doi vectori, 10

vectori egali, 2

# 1. Vectori

## 1.1. Segmente orientate. Vectori în plan

### Segmente orientate

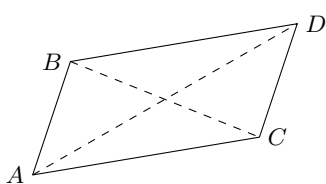
**Definiție.** Perechea ordonată de puncte  $(A, B)$  se numește **segment orientat** și se notează cu  $\overline{AB}$ .

**Definiție.** Segmentele orientate  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sunt **echipolente** (se notează cu  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ ), dacă mijlocul segmentului  $[AD]$  coincide cu mijlocul lui  $[BC]$ .

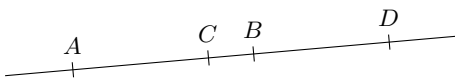
**Observație.** Dacă  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ , atunci există o translație care transformă segmentul  $\overline{AB}$  în segmentul  $\overline{CD}$ .

**Proprietăți.** Pe mulțimea segmentelor orientate relația de echipolență este o relație de echivalență:

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$  ( $\sim$  este *reflexivă*),
- dacă  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ , atunci  $\overline{CD} \sim \overline{AB}$  ( $\sim$  este *simetrică*),
- dacă  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  și  $\overline{CD} \sim \overline{EF}$ , atunci  $\overline{AB} \sim \overline{EF}$  ( $\sim$  este *tranzitivă*).



$\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sunt echipolente dacă și numai dacă  $ABDC$  este paralelogram sau punctele  $A, B, C, D$  sunt coliniare și mijlocul lui  $[AD]$  coincide cu mijlocul lui  $[BC]$ .



### Vectori

**Definiție.** Se numește **vector** mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment dat.

**Notăție.** Vectorul determinat de segmentul orientat  $\overline{AB}$  se notează cu  $\overrightarrow{AB}$  (sau cu litere mici):  $\overrightarrow{AB} = \{CD \mid CD \sim \overline{AB}\}$ .

**Observație.** Dacă  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ , atunci  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Dacă  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , atunci spunem că segmentul  $\overline{AB}$  (sau  $\overline{CD}$ ) este un **reprezentant** al vectorului  $\vec{u}$ .

**Definiție. Lungimea** (sau **modulul**) unui vector este lungimea oricărui reprezentant al său și se notează cu  $|\vec{u}|$ .

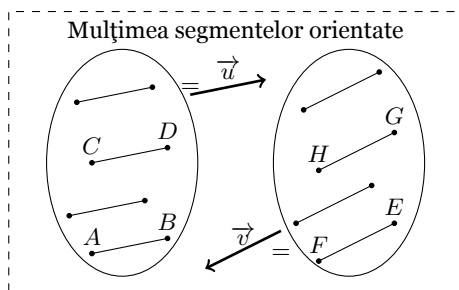
**Definiție.** Vectorul de lungime nulă  $\overrightarrow{AA}$  se numește **vectorul nul** și se notează  $\vec{0}$ .

**Definiție.** Vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt **egali** ( $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ), dacă segmentele orientate  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sunt echipolente.

**Observație.** Doi vectori sunt egali dacă au același modul, aceeași direcție și sens.

**Teoremă.** (Existența reprezentantului cu origine dată) Pentru orice vector  $\vec{u}$  și orice punct  $M$ , există un unic segment orientat  $\overline{MM'}$  pentru care  $\vec{u} = \overline{MM'}$ .

**Consecință.** Dacă  $\overline{MA} = \overline{MB}$ , atunci  $A = B$ .



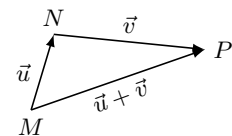
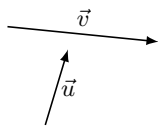
$\vec{u} = \overline{AB} = \overline{CD} = \dots$ ,  
 $\vec{v} = \overline{EF} = \overline{GH} = \dots$ ,  
 $\overline{CD}$  este un reprezentant al vectorului  $\vec{u}$ ,  
 $\overline{EF}$  este un reprezentant al lui  $\vec{v}$ ,  
 $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

## 1.2. Operații cu vectori

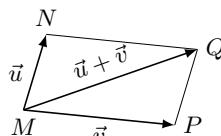
### Suma a doi vectori

**Suma** vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  se definește în felul următor.

- (Regula triunghiului): fie  $M$  un punct oarecare, atunci există punctele  $N$  și  $P$  astfel încât  $\overline{MN} = \vec{u}$ ,  $\overline{NP} = \vec{v}$ . Suma vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  este vectorul  $\vec{u} + \vec{v} = \overline{MP}$ .
- (Regula paralelogramului): dacă  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  nu sunt coliniare, fie  $M$  un punct oarecare; atunci există punctele  $N$  și  $P$  astfel încât  $\overline{MN} = \vec{u}$ ,  $\overline{MP} = \vec{v}$ ; se construiește paralelogramul  $MNPQ$ . Suma vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  este vectorul  $\vec{u} + \vec{v} = \overline{MQ}$ .



Regula triunghiului



Regula paralelogramului



### Proprietățile adunării vectorilor

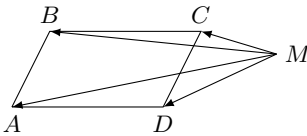
**Definiție.** Opusul vectorului  $\vec{AB}$  este vectorul  $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .

**Proprietăți.** Pentru orice vectori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :

- *asociativitate:*  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- *comutativitate:*  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- există element neutru ( $\vec{0}$ ):  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ ;
- orice vector  $\vec{a}$  are un opus ( $-\vec{a}$ ):  $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ .

**Problemă.** Fie  $M$  un punct oarecare situat în planul paralelogramului  $ABCD$ . Să se demonstreze că  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .

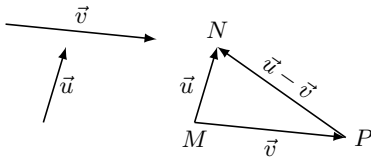
**S.** În paralelogramul  $ABCD$   $\vec{AB} = \vec{DC} = -\vec{CD}$  és  $\vec{AD} = \vec{BC} = -\vec{CB}$ .



$$\begin{aligned} \vec{MA} + \vec{MC} &= \\ &= (\vec{MB} + \vec{BA}) + (\vec{MD} + \vec{DC}) = \\ &= \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{BA} + \vec{DC} = \\ &= \vec{MB} + \vec{MD}. \end{aligned}$$

### Scăderea vectorilor

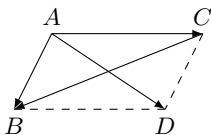
**Diferența** a doi vectori  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  se definește prin relația  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$  și se construiește în felul următor: fie  $M$  un punct oarecare; există punctele  $N$  și  $P$  astfel încât  $\vec{MN} = \vec{u}$  și  $\vec{MP} = \vec{v}$ . Atunci  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{PN}$ .



Pentru orice puncte  $M, N, P$   
 $\vec{MN} - \vec{MP} = \vec{MN} + \vec{PM} = \vec{PN}$ .

**Problemă.** În triunghiul  $ABC$  modulul vectorului  $\vec{AB} + \vec{AC}$  este egal cu modulul vectorului  $\vec{AB} - \vec{AC}$ . Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic!

**S.** Se construiește paralelogramul  $ABCD$ :  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ , deci  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD$ .



$$\begin{aligned} \vec{AB} - \vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}, \text{ deci} \\ |\vec{AB} - \vec{AC}| &= |\vec{CB}| = CB. \\ |\vec{AB} + \vec{AC}| &= |\vec{AB} - \vec{AC}| \Rightarrow AD = BC, \text{ deci} \\ &\text{paralelogramul } ABCD \text{ este un dreptunghi; astfel,} \\ &m(\widehat{BAC}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

## Înmulțirea unui vector cu un scalar

**Definiție.** Produsul dintre vectorul  $\vec{u} \neq \vec{0}$  și numărul real  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  este vectorul notat  $\alpha\vec{u}$  care

- are aceeași direcție cu vectorul deînmulțit  $\vec{u}$ ;
- dacă  $\alpha > 0$ , atunci are același sens, dacă  $\alpha < 0$ , are sens opus cu  $\vec{u}$ ;
- are modulul egal cu  $|\alpha| \cdot |\vec{u}|$ .

Dacă  $\vec{u} = \vec{0}$  sau  $\alpha = 0$ , atunci  $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$ .

## Proprietăți

**Proprietăți.** Fie  $\vec{u}, \vec{v}$  vectori și  $\alpha, \beta$  numere reale oarecare, atunci

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ ;
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ ;
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ ;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ;
- $(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$ .

**Problemă.** În triunghiul  $ABC$  fie  $M$  mijlocul segmentului  $[BC]$ . Să se demonstreze că  $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .

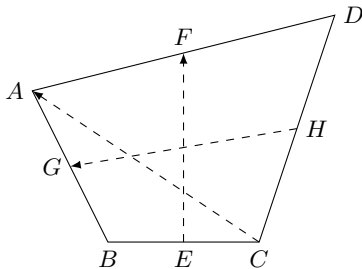
**S.** Conform regulei triunghiului,

$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} \\ \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} \end{cases} \Leftrightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BM} + \vec{CM}}_{=\vec{0}} = \vec{AB} + \vec{AC}, \text{ deci}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

**Problemă.** Fie  $ABCD$  un patrulater și fie  $E, F, G, H$  mijloacele laturilor  $[BC]$ ,  $[DA]$ ,  $[AB]$ ,  $[CD]$ . Să se demonstreze că  $\vec{EF} + \vec{HG} = \vec{CA}$ .

**S.**  $G$  este mijlocul lui  $[AB]$ , deci  $\vec{AG} = \vec{GB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ . Analog,  $\vec{BE} = \vec{EC} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ ,  $\vec{CH} = \vec{HD} = \frac{1}{2}\vec{CD}$ ,  $\vec{DF} = \vec{FA} = \frac{1}{2}\vec{DA}$ .



$$\begin{aligned} \vec{EF} + \vec{HG} &= (\vec{EC} + \vec{CD} + \vec{DF}) + (\vec{HD} + \vec{DA} + \vec{AG}) = \\ &= (\vec{CD} + \vec{DA}) + (\vec{EC} + \vec{HD} + \vec{DF} + \vec{AG}) = \\ &= \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \\ &= \vec{CA} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AB}) = \\ &= \vec{CA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{CA}. \end{aligned}$$

# 3. Trigonometrie

## 3.1. Elementele trigonometriei

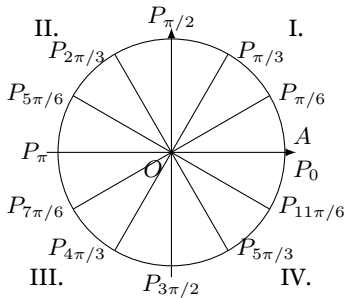
### Măsura unghiurilor în radiani

**Definiție.** Raportul dintre semiperimetrul și raza unui cerc este constant și se notează prin  $\pi$  (valoarea aproximativă este  $\pi \approx 3,1415$ ).

**Definiție.** Măsura unui unghi la centrul unui cerc cuprinzând un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului este de **1 radian**.

**Observație.** Dacă  $\alpha$  este măsura unui unghi în grade iar  $x_r$  este măsura unghiului în radiani, atunci este adevărată relația

$$\frac{\alpha}{x_r} = \frac{180}{\pi}.$$



### Cercul trigonometric

**Definiție.** Fie  $xOy$  un reper cartezian. Cercul cu centrul în  $O$  și cu raza egală cu 1 pe care este indicat **sensul trigonometric direct** (invers acelor ceasornicului) se numește **cercul trigonometric**.

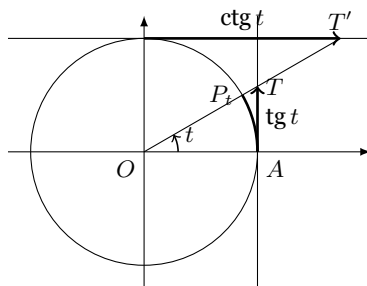
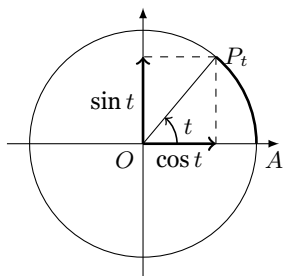
**Notăție.** Fie  $t \in \mathbb{R}$  un număr real. Atunci există un unic punct  $P_t$  pe cercul trigonometric pentru care  $m(\widehat{AOP_t}) = t$ .

### Sinusul și cosinusul

Fie  $t$  un număr real și  $P_t$  punctul pentru care  $m(\widehat{AOP_t}) = t$ .

**Definiție.** Ordinata punctului  $P_t$  se numește **sinusul** numărului real  $t$  și se notează prin  $\sin t$ .

**Definiție.** Abscisa punctului  $P_t$  se numește **cosinusul** numărului real  $t$  și se notează prin  $\cos t$ .



### Tangenta și cotangenta

**Definiție.** Fie  $d_{tg}$  dreapta verticală de ecuație  $x = 1$  și fie  $d_{ctg}$  dreapta orizontală de ecuație  $y = 1$ .

**Definiție.** Fie  $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  și  $T$  intersecția dreptelor  $OP_t$  și  $d_{tg}$ . Ordinata punctului  $T$  se numește **tangenta** numărului  $t$  și se notează prin  $tg t$ .

**Definiție.** Fie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  și fie  $T'$  intersecția dreptelor  $OP_t$  și  $d_{ctg}$ . Abscisa punctului  $T'$  se numește **cotangenta** numărului real  $t$  și se notează prin  $ctg t$ .

### Valori remarcabile

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

### Reducerea la primul cadran

$x \in C_2$	$x \in C_3$	$x \in C_4$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$	$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$	$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$tg x = -tg(\pi - x)$	$tg x = tg(x - \pi)$	$tg x = -tg(2\pi - x)$
$ctg x = -ctg(\pi - x)$	$ctg x = ctg(x - \pi)$	$ctg x = -ctg(2\pi - x)$

### Semnul funcțiilor trigonometrice

$x$	0	$C_1$	$\frac{\pi}{2}$	$C_2$	$\pi$	$C_3$	$\frac{3\pi}{2}$	$C_4$	$2\pi$
$\sin x$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\cos x$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\operatorname{tg} x$	0	+	+ -	-	0	+	+ -	-	0
$\operatorname{ctg} x$	+	+	0	-	- +	+	0	-	-

### Monotonia funcțiilor trigonometrice

$x$	0	$C_1$	$\frac{\pi}{2}$	$C_2$	$\pi$	$C_3$	$\frac{3\pi}{2}$	$C_4$	$2\pi$
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg} x$	0	↗	$+\infty -\infty$	↗	0	↗	$+\infty -\infty$	↗	0
$\operatorname{ctg} x$	$ +\infty$	↘	0	↘	$-\infty +\infty$	↘	0	↘	$-\infty $

### Formule trigonometrice fundamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ( <i>formula fundamentală</i> )		$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

### Formule trigonometrice pentru sumă și diferență

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \quad \operatorname{ctg}(x - y) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

### Formule pentru unghi dublu, unghi triplu

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(3x) = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}(3x) = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{ctg}(3x) = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \cdot \operatorname{ctg} x}{3 \cdot \operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

### Formula unghiului pe jumătate

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \alpha - \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1}, \text{ astfel } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

## 2.3. Inegalități și limite

Fie  $(a_n), (b_n), (c_n)$  șiruri,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Teoremă.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  și  $|a_n - \alpha| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ .

**Teoremă.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$  și  $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

**Teoremă.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$  și  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Teoremă.** Dacă  $(a_n), (b_n)$  sunt convergente și  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Teoremă.** Dacă  $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ .

**Problemă.** Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2 + n}$ .

S. Pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\sin k}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + k} < \frac{1}{n^2}$ , astfel

$$0 \leq \frac{\sin 1}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2 + n} < n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

de unde  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2 + n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2 + n} = 0.$$

**Problemă.** Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

S. Demonstrăm (prin metoda inducției matematice) că

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \forall n \geq 2.$$

I.  $n = 2$ :  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{2}$ .

II. Presupunând că inegalitatea este adevărată pentru  $k$ , demonstrăm că este adevărată și pentru  $k + 1$ :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Din  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$  și  $a_n > \sqrt{n}, \forall n \geq 2$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

## 2.4. Convergență, monotonie, mărginire

**Teoremă.** Dacă șirul  $(a_n)$  este convergent, atunci  $(a_n)$  este mărginit.

**Teoremă.** Dacă șirul  $(a_n)$  este mărginit și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , atunci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

**Exemplu.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n+3} \sin \frac{1}{n} = 0$ , pentru că  $a_n = \frac{2n}{4n+3} < \frac{1}{2} \Rightarrow (a_n)$  este mărginit și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = \sin 0 = 0$ .

### Teorema lui Weierstrass

**Teoremă.** Orice șir care este monoton și mărginit este convergent.

**Problemă.** Să se demonstreze că șirul  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$ ,  $\forall n \geq 1$  este convergent și să se determine limita șirului.

**S.** Din primele câțiva termeni se pare că șirul este crescător.

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_n + 12} > a_n \Leftrightarrow -a_n^2 + a_n + 12 > 0 \Leftrightarrow a_n \in (-3, 4),$$

deci pentru a arăta monotonia șirului, mai întâi trebuie demonstrat că  $a_n < 4$ ,  $\forall n \geq 1$  - demonstrația o facem cu metoda inducției matematice:

I.  $n = 1$ :  $a_1 = 2 < 4$ .

II. Presupunând că  $a_k < 4$ , demonstrăm că  $a_{k+1} < 4$ :

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 12} < \sqrt{4 + 12} = 4.$$

Astfel,  $a_n < 4$  și de aici  $(a_n)$  este strict crescător.

Conform teoremei lui Weierstrass șirul  $(a_n)$  este convergent- fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + 12} \Rightarrow l = \sqrt{l + 12} \Rightarrow l_1 = -3, l_2 = 4.$$

Deoarece  $a_n > 0$ , limita nu poate fi  $l_1 = -3$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_2 = 4$ .

### Numărul $e$

**Teoremă.** Șirul  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  este convergent și limita șirului este numărul  $e$ .

**Teoremă.** Șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cu termenul general  $a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ .



# 3. Limite de funcții

## 3.1. Limita unei funcții

**Definiție.** Funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  are **limita**  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  în punctul de acumulare  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  dacă și numai dacă pentru oricare vecinătate  $V_l$  a lui  $l$  există o vecinătate  $U_{x_0}$  a lui  $x_0$  astfel încât,  $\forall x \in U_{x_0}^* \cap D \Rightarrow f(x) \in V_l$ .

**Notăție.** Dacă funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  are limita  $l$  în  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , atunci se scrie  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Teoremă.** (Definiția limitei după Heine) Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Afirmațiile următoare sunt echivalente:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ,
- $\forall (x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq x_0$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

**Problemă.** Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  nu are limită în punctul  $x_0 = 0!$

**S.** Fie șirurile  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(x'_n)_{n \geq 1}$ , unde  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ,  $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ .

Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$  és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1,$$

deci (din definiția după Heine)  $f$  nu are limită în punctul  $x_0$ .

### Limită în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ ,  $x \neq x_0$  atunci  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ ,  $x \neq x_0$  atunci  $f(x) > \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ ,  $x \neq x_0$  atunci  $f(x) < -\varepsilon$ .

**Problemă.** Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \infty!$

**S.** Trebuie arătat că  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  a. î. dacă  $|x| < \delta$ ,  $x \neq 0$ , atunci  $f(x) > \varepsilon$ .

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left( \frac{1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right).$$

Dacă  $\delta = \min \left\{ \left| \frac{1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right|, \left| \frac{1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right| \right\}$ , atunci  $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon$ .

### Limită în $+\infty$

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x > \delta(\varepsilon)$  atunci  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x > \delta(\varepsilon)$  atunci  $f(x) > \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x > \delta(\varepsilon)$ , atunci  $f(x) < -\varepsilon$ .

### Limită în $-\infty$

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x < -\delta(\varepsilon)$  atunci  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x < -\delta(\varepsilon)$  atunci  $f(x) > \varepsilon$ .

**Definiție.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. dacă  $x < -\delta(\varepsilon)$ , atunci  $f(x) < -\varepsilon$ .

### Limite laterale

**Definiție.** Funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  are **limita laterală la stânga**  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  în punctul de acumulare  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  dacă și numai dacă pentru oricare vecinătate  $V_l$  a lui  $l$  există o vecinătate  $U_{x_0}$  a lui  $x_0$  astfel încât  $\forall x \in U_{x_0}^* \cap D$ ,  $x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V_l$ .

**Notație.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  sau  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ .

**Teoremă.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow$

$\forall (x_n)_{n \geq 1}, x_n \in D, x_n < x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

**Observație.** În mod analog se definește limita laterală la dreapta.

**Teoremă.** Fie funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0$  un punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă există limitele laterale la stânga și la dreapta și acestea sunt egale.

## 5.4. Derivatele funcțiilor elementare

Funcția	Derivata funcției	Domeniul derivatei
$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \log_a x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$f(x) = a^x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$