

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND
CERINTELOR DE BACALAUREAT 2016

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Cuprins

1. Elemente de logică matematică	1
1.1. Propoziții	1
1.2. Predicate	4
1.3. Mulțimi	5
1.4. Inducția matematică	7
2. Numere reale	9
2.1. Numere reale	9
2.2. Puteri	12
2.3. Radicali	14
2.4. Logaritmi	16
3. Șiruri, progresii	18
3.1. Șiruri	18
3.2. Progresii aritmetice	20
3.3. Progresii geometrice	22
4. Funcții	24
4.1. Noțiunea de funcție	24
4.2. Operații cu funcții numerice	26
4.3. Proprietățile funcțiilor	31
4.4. Funcții bijective	36
4.5. Graficul unei funcții	41
4.6. Graficul și proprietățile funcției	43
5. Funcții numerice, ecuații	48
5.1. Funcția de gradul întâi	48
5.2. Ecuații și inecuații de gradul întâi	50
5.3. Funcția de gradul al doilea	53
5.4. Ecuații de gradul al doilea	56
5.5. Funcția putere cu exponent natural	60
5.6. Funcția putere cu exponent negativ	62
5.7. Funcția radical	64

5.8. Ecuații iraționale	66
5.9. Funcția exponențială	68
5.10. Ecuații exponențiale	69
5.11. Funcția logaritmică	72
5.12. Ecuații logaritmice	74
5.13. Funcția sinus	79
5.14. Funcția arcsinus	80
5.15. Funcția cosinus	83
5.16. Funcția arccosinus	84
5.17. Funcția tangentă	87
5.18. Funcția arctangentă	88
5.19. Funcția cotangentă	90
5.20. Funcția arccotangentă	91
6. Numere complexe	93
6.1. Mulțimea numerelor complexe	93
6.2. Forma algebrică	94
6.3. Reprezentarea geometrică	97
6.4. Forma trigonometrică	99
6.5. Rădăcinile de ordinul n	102
6.6. Ecuații binome și bicvadractice	103
7. Elemente de combinatorică	104
7.1. Reguli generale ale combinatoricii	104
7.2. Permutări	107
7.3. Grupul S_n	107
7.4. Aranjamente	111
7.5. Combinări	112
7.6. Binomul lui Newton	113
8. Statistică și probabilități	114
8.1. Matematică financiară	114
8.2. Elemente de statistică matematică	116
8.3. Calculul probabilităților	118
9. Matrice și determinanți	122
9.1. Matrice	122
9.2. Determinanți	126
9.3. Aplicații ale determinanților în geometrie	130
9.4. Matrice inversabile	131
9.5. Rangul unei matrice	132
10. Sisteme de ecuații liniare	135
11. Structuri algebrice	140
11.1. Legi de compoziție	140

11.2. Grupuri	149
11.3. Subgrupuri	152
11.4. Morfisme de grupuri	153
11.5. Inele și corpuri	155
12. Polinoame	158
12.1. Inel de polinoame	158
12.2. Forma algebrică a unui polinom	158

Glosar

- înmulțirea matricelor, 124
- înmulțirea unei matrice cu un număr, 122
- adunarea matricelor, 123
- afix, 97
- aranjamente, 111
- argument polar, 99
- asimptotă, 45
- asociativitate, 142
- automorfism, 153
- axa numerelor, 12
- axa reală, 97
- axă de coordonate, 12
- binomul lui Newton, 113
- caracteristică, 116
- coeficienți binomiali, 112
- combinări, 112
- complement algebric, 127
- comutativitate, 143
- concluzie, 2
- coordonate polare, 99
- corp, 157
- corp comutativ, 157
- cuantificatorul existențial, 4
- cuantificatorul universal, 4
- determinant de ordinul doi, 126
- determinant de ordinul trei, 126
- determinantul Vandermonde, 129
- dezvoltarea determinantului, 127
- diferența matricelor, 123
- discriminant, 56
- dispersia, 117
- distributivitate, 148
- divizibilitate, 10
- divizor al lui zero, 156
- dobândă, 115
- dobândă compusă, 115
- dobânda compusă, 115
- dobânda simplă, 115
- domeniul de integritate, 156
- eșantion, 116
- ecuație
 - bicvadratică, 103
 - binomă, 103
 - de gradul întâi, 50
 - de gradul al doilea, 56
 - semnul rădăcinilor, 57
 - exponențială, 69
 - logaritmică, 74
- element generator, 153
- element neutru, 144
- element neutru la dreapta, 144
- element neutru la stânga, 144
- element simetrizabil, 147
- endomorfism, 153
- eveniment, 119
 - elementar, 118
 - evenimente incompatibile, 119
 - imposibil, 119
 - intersecție, 119
 - negație, 119

- reuniune, 119
- sigur, 119
- factorial, 107
- formula lui Moivre, 101
- formule echivalente, 3
- formule logice, 3
- formulele de Morgan, 6
- fracție zecimală finită, 10
- fracție zecimală periodică mixtă, 10
- fracție zecimală periodică simplă, 10
- frecvență absolută, 117
- frecvența relativă, 117
- funcția
 - arccosinus, 84
 - arccotangentă, 91
 - arcsinus, 80
 - arctangentă, 88
 - cosinus, 83
 - cotangentă, 90
 - de gradul întâi, 48
 - de gradul al doilea, 53
 - exponențială, 68
 - identică, 30
 - logaritmică, 72
 - polinomială, 159
 - putere, 60, 62
 - radical, 64
 - sinus, 79
 - tangentă, 87
- funcție, 24
 - bijectivă, 39
 - codomeniu, 24
 - concavă, 33
 - convexă, 33
 - crescătoare, 34
 - descrescătoare, 34
 - domeniu de definiție, 24
 - graficul funcției, 41
 - Imf , imaginea funcției, 31
 - impară, 32
 - injectivă, 36
 - inversă, 30, 40
 - inversabilă, 30, 40
 - mărginită, 34
 - monotonă, 34
 - mulțimea de valori, 24
 - numerică, 24
 - pară, 32
 - periodică, 32
 - reprezentarea geometrică, 41
 - restricția unei funcții, 24
 - surjectivă, 38
- funcții
 - câtul funcțiilor, 29
 - compunerea funcțiilor, 29
 - diferența funcțiilor, 27
 - produsul funcțiilor, 28
 - suma funcțiilor, 26
- grup, 149
 - grup ciclic, 153
 - grup finit, 149
 - grupul lui Klein, 150
 - grupul rădăcinilor de ordinul n , 153
 - grupul simetric, 150
 - grupuri izomorfe, 153
- \mathbb{I} , mulțimea numerelor iraționale, 9
- i , 94
- indivizi, 116
- inecuație
 - de gradul întâi, 51
 - de gradul al doilea, 59
- inel, 155
- inel integru, 156
- inel unitar, 155
- inelul polinoamelor, 158
- invers, 147
- inversiune, 110
- ipoteză, 2
- izomorfism de corpuri, 157

izomorfism de grupuri, 153
 izomorfism de inele, 157

lege de compoziție indusă, 152
 lege de compoziție internă, 140
 logaritm, 16
 natural, 16

matrix
 nemszinguláris, 131
 matrice, 122
 inversa unei matrici, 131
 inversabilă, 131
 matrice nesingulară, 131
 matrice pătratică, 122
 matrice singulară, 131
 matrice unitate, 124
 matricea adjunctă, 131
 matricea nulă, 123
 media, 117
 median, 117
 minor, 127, 132
 minor principal, 137
 modul unui număr real, 11
 modulo n , 142
 modulul unui număr complex, 95
 monoid, 149
 morfism de corpuri, 157
 morfism de grupuri, 153
 morfism de inele, 157
 mulțime, 5
 complementară, 6
 diferență mulțimilor, 5
 intersecția mulțimilor, 5
 mulțimi egale, 5
 ordonată, 107
 produs cartezian, 6
 reuniunea mulțimilor, 5
 mulțimea claselor de resturi, 142
 mulțimea numerelor complexe, 93
 multiplicitatea unei rădăcini, 163

\mathbb{N} , mulțimea numerelor naturale, 9
 notație aditivă, 140
 notație multiplicativă, 140
 număr complex, 93
 afix, 97
 argument, 99
 argument redus, 99
 conjugatul, 95
 forma algebrică, 94
 forma trigonometrică, 100
 i, 94
 imaginea geometrică, 97
 Imz, 94
 modul, 95
 partea imaginară, 94
 rădăcină de ordinul n , 102
 Rez, partea reală, 94
 număr prim, 10

omomorfism de grupuri, 153
 operație asociativă, 142
 operație comutativă, 143
 operație indusă, 140
 opus, 147
 opusul matricii, 123
 ordinul grupului, 149
 ordinul unui element, 149

parabolă, 53
 parte fracțională, 11
 parte stabilă, 140
 partea întreagă, 11
 perioadă, 32
 principală, 32
 permutare, 107, 108
 înmulțirea permutărilor, 108
 impară, 111
 pară, 111
 permutarea identică, 109
 permutarea inversă, 109
 puteri, 109

semn, 111
 polinom
 coeficientul dominant, 160
 divizibil, 159
 forma algebrică, 158
 grad, 158
 ireductibil, 159
 rădăcină, 162
 reductibil, 159
 teorema împărțirii cu rest, 159
 termen principal, 160
 valoarea, 159
 populație statistică, 116
 predicat, 4
 probabilitate, 120
 clasică, 120
 procent, 114
 produs cartezian, 6
 produsul matricelor, 124
 progresie aritmetică, 20
 progresie geometrică, 22
 propoziție, 1
 compusă, 2
 conjuncție, 2
 disjuncție, 2
 echivalența propozițiilor, 3
 existențială, 4
 implicație, 2
 negație, 1
 universală, 4
 puterea matricei, 125
 puteri, 12

 \mathbb{Q} , mulțimea numerelor raționale, 9

 \mathbb{R} , mulțimea numerelor reale, 9
 rădăcini ale unității, 102
 rația progresiei aritmetice, 20
 rația progresiei geometrice, 22
 raționalizarea numitorilor, 15
 rangul unei matrice, 132

 rata dobânzii, 115
 raza polară, 99
 Regula lui Cramer, 136
 regula produsului, 105
 regula sumei, 104
 Relațiile lui Viéte, 163
 relațiile lui Viéte, 57
 reper cartezian (ortogonal), 41

 scăderea matricelor, 123
 schema lui Horner, 161
 semigrup, 149
 simetricul, 147
 sistem Cramer, 136
 sistem de ecuații liniare, 135
 coeficienți, 135
 compatibil, 135
 determinantul sistemului, 135
 determinat, 135
 ecuații principale, 137
 ecuații secundare, 137
 incompatibil, 135
 matricea extinsă, 135
 matricea sistemului, 135
 necunoscută secundară, 137
 nedeterminat, 135
 regula lui Cramer, 136
 soluție, 135
 teorema Kronecker-Capelli, 138
 teorema lui Rouché, 138
 termeni liberi, 135
 sistem de ecuații principale
 necunoscute principale, 137
 structură algebrică, 149
 subcorp, 157
 subgrup ciclic, 153
 subgrup generate, 153
 subgrup propriu, 152
 subinel, 156
 submulțime, 5, 152
 suma matricelor, 123

șir, 18

crescător, 19

de numere, 18

descrescător, 19

mărginit, 19

monoton, 19

tabla operației, 140

tautologie, 3

teorema împărțirii cu rest, 10

teorema fundamentală algebrei, 162

teorema Gauss-d'Alembert, 162

Teorema Kronecker-Capelli, 138

teorema lui Bézout, 161

teorema lui Rouché, 138

transpoziție, 110

transpusa matricei, 125

triunghiul lui Pascal, 112

unitățile inelului, 155

unitatea imaginară, 94

universul probelor, 118

valoare absolută, 11

valoare de adevăr, 1

valoarea polinomului, 159

\mathbb{Z} , mulțimea numerelor întregi, 9

1. Elemente de logică matematică

1.1. Propoziții

Definiție. Se numește **propoziție** un enunț declarativ despre care se poate decide dacă este adevărat sau fals.

Observație. O propoziție nu poate fi în aceeași timp și adevărată și falsă.

Definiție. Unei propoziții îi putem atribui una din cele două **valori de adevăr** “1” sau “0”: dacă propoziția este adevărată, valoarea sa de adevăr este 1, iar valoarea de adevăr a unei propoziții false este 0 (“1” și “0” sunt simboluri, nu reprezintă numere).

Notație. Propozițiile se notează cu literele mici p, q, r, \dots

Exemplu. Sunt propoziții: “În fiecare pătrat există un unghi drept.”- propoziție adevărată, valoarea sa de adevăr este 1;

“suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 110° .”-falsă, valoarea sa de adevăr este 0;

“Într-un triunghi echilateral toate laturile sunt de lungime egală.”-adevărată, valoarea sa de adevăr este 1.

Nu sunt propoziții (în sensul logicii matematice): “ $x + 3 = 10$ ”- nu se poate decide dacă este adevărată sau falsă: pentru $x = 7$, propoziția “ $7 + 3 = 10$ ” este adevărată, iar pentru alte valori ale lui x propoziția este falsă;

“Într-un triunghi laturile sunt congruente.”- în cazul triunghiului echilateral propoziția este adevărată, în alte cazuri este falsă.

Negația unei propoziții

Definiție. **Negația** propoziției p este propoziția “non p ”, notată $\neg p$ sau \bar{p} , care este adevărată dacă p este falsă și falsă dacă p este adevărată.

Tabelul de adevăr al lui $\neg p$:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Observație. Propoziția $\neg(\neg p)$ are aceeași valoarea de adevăr ca și p .

Pentru a nega o propoziție, se pune în fața ei expresia “nu e adevărat că”.

Exemplu. Negația propoziției adevărate p : “ $2 + 3 > 4$ ” este $\neg p$: “ $2 + 3 \not> 4$ ”.

Negația propoziției false “Fiecare câine este neagră.” este propoziția adevărată “Există câine care nu este neagră”.

Conjuncția propozițiilor

Definiție. **Conjuncția** propozițiilor p, q este propoziția “ p și q ”, notată $p \wedge q$,

Tabelul de adevăr al lui $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

care este adevărată numai atunci când atât p cât și q sunt adevărate, fiind falsă în celelalte cazuri.

Observație. Pentru a exprima conjuncția propozițiilor p, q , punem între cele două propoziții cuvântul “și”.

Disjuncția propozițiilor

Definiție. **Disjuncția** propozițiilor p, q este propoziția “ p sau q ”, notată $p \vee q$,

Tabelul de adevăr al lui $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

care este falsă numai atunci când p cât și q sunt false, fiind adevărată în celelalte cazuri.

Observație. Pentru a exprima disjuncția propozițiilor p, q , punem între cele două propoziții cuvântul “sau”.

Definiție. Din propozițiile simple p, q, r, \dots prin aplicarea de un număr finit de ori a conectorilor logici \neg, \vee, \wedge se pot crea **propoziții compuse**.

Observație. Calculul propozițiilor studiază propozițiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului în raport cu valorile logice ale propozițiilor simple care le compun.

Implicația propozițiilor

Definiție. Se numește **implicația** propozițiilor p și q propoziția $((\neg p) \vee q)$ și se notează $p \rightarrow q$ (“ p implică q ”).

Tabelul de adevăr al lui $p \rightarrow q$:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Din tabelul de adevăr constatăm că $p \rightarrow q$ este falsă numai dacă p este adevărată și q este falsă, fiind adevărată în celelalte cazuri.

Observație. Implicația propozițiilor p, q se exprimă astfel: “dacă p atunci q ”. În implicația $p \rightarrow q$ se numește **ipoteză**, iar q se numește **concluzia** implicației.

Exemplu. Considerând propozițiile p : “Numărul 2 este par.” și q : “Pământul este

sferic.”:

- $p \rightarrow q$: “Dacă numărul 2 este par atunci Pământul este sferic.”- propoziție falsă, ipoteza fiind adevărată și concluzia falsă;
- $q \rightarrow p$: “Dacă Pământul este sferic, atunci numărul 2 este par.”- propoziție adevărată, ipoteza fiind falsă și concluzia adevărată.

Echivalența propozițiilor

Definiție. Propoziția $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ se numește **echivalența propozițiilor** p, q și se notează cu $p \leftrightarrow q$, “ p echivalent cu q ”). Din tabelul de adevăr constatăm

Tabelul de adevăr al lui $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

că $p \leftrightarrow q$ este adevărată numai dacă p și q sunt simultan adevărate sau simultan false, fiind adevărată în celelalte cazuri.

Observație. Echivalența propozițiilor p, q se exprimă astfel: “ p dacă și numai dacă q ”..

Definiție. Cu literele p, q, r, \dots și cu simbolurile conectori logici $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ se formează **formule logice**.

Exemplu. Formulă logică: $p \vee (q \rightarrow \neg p), (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.

Definiție. O formulă se numește **tautologie** dacă propoziția obținută este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor înlocuite.

Definiție. Dacă formulele α și β se compun din aceleași p, q, r, \dots și pentru orice înlocuire a literelor cu propoziții, cele două propoziții obținute au aceeași valoare de adevăr, atunci formulele α și β se numesc **echivalente**.

Notație. Echivalența formulelor α și β se notează astfel: $\alpha \equiv \beta$ sau $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Echivalența a două formule se demonstrează prin completarea tabelului de adevăr, examinând toate posibilitățile de valori de adevăr ale propozițiilor componente.

Problemă. Să arătăm că $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$.

S. Valorile de adevăr din coloana corespunzătoare lui $p \rightarrow q$ coincid cu valorile de adevăr din coloana lui $\neg q \rightarrow \neg p$.

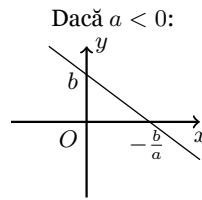
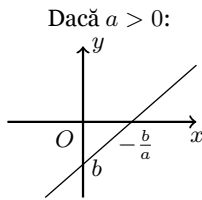
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

5. Funcții numerice, ecuații

5.1. Funcția de gradul întâi

Definiție. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește **funcția de gradul întâi**.

Reprezentarea geometrică a funcției de gradul întâi este o dreaptă.



Tabelul de variație și de semn

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
dacă $a > 0$, $f(x)$	$-\infty$	$- \nearrow -$	$0 \quad + \nearrow + \quad +\infty$
dacă $a < 0$, $f(x)$	$+\infty$	$+ \searrow +$	$0 \quad - \searrow - \quad -\infty$

Problemă. Fie f o funcție de gradul întâi. Să se demonstreze că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare!

S. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Atunci

$$(f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$$

o funcție de gradul întâi. Coeficientul lui x (a^2) fiind pozitiv, f este strict crescătoare.

Problemă. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3!$

S. Funcția f fiind de gradul întâi, f este strict crescătoare dacă și numai dacă coeficientul lui x este strict pozitiv: $3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Problemă. Să se determine funcția de gradul întâi al cărei grafic trece prin punctele $A(2, 7)$ și $B(-3, -18)$.

S. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$A, B \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 7, f(-3) = -18 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ -3a + b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$$

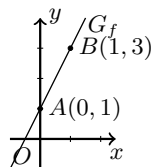
Deci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$.

Proprietățile funcției de gradul întâi

Definiție	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Imaginea lui f	$Im f = \mathbb{R}$
Puncte de intersecție cu axele	$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$ $G_f \cap Ox = \{(-\frac{b}{a}, 0)\}$
Peiodicitate	nu este periodică
Paritate	dacă $b = 0$, f este impară, centru de simetrie: O dacă $b \neq 0$, f nu este pară, nu este impară
Continuitate	continuă pe \mathbb{R}
Asimptote	asimptotă oblică la $\pm\infty$: $y = ax + b$
Mărginire	nu este mărginită
Monotonie	dacă $a > 0$, f este strict crescătoare pe \mathbb{R} dacă $a < 0$, f este strict descrescătoare pe \mathbb{R}
Semnul funcției	dacă $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{b}{a}, \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ dacă $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{b}{a}, \infty)$
Bijectivitate	f este bijectivă
Funcția inversă	$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Problemă. Să se traseze graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

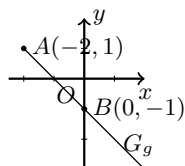
S. f fiind o funcție de gradul întâi, graficul lui f este o dreaptă.



Pentru a desena graficul este de ajuns să aflăm două puncte de pe dreaptă. $f(0) = 1, f(1) = 3$, deci dreapta este determinată de punctele $A(0, 1)$ și $B(1, 3)$.

Problemă. Să se traseze graficul funcției $g : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x - 1$.

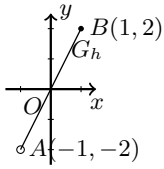
S. g este restricția unei funcții de gradul întâi la intervalul $[-2, \infty)$, așadar graficul lui g este aceea "jumătatea" a unei drepte, unde $x \geq -2$, deci o semidreaptă.



Pentru a desena semidreapta este suficient să desenăm originea ($x = -2$) semidreptei și un punct oarecare al ei. $g(-2) = 1, g(0) = -1$, deci semidreapta este determinată de punctul de origine $A(-2, 1)$ și de punctul $B(0, -1)$.

Problemă. Să se traseze graficul funcției $h : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x$.

S. h este restricția unei funcții de gradul întâi la intervalul $(-1, 1]$, deci graficul lui



h este aceea parte a dreptei unde abscisa aparține domeniului de existență, deci un segment. Pentru desenarea segmentului este necesară desenarea celor două puncte finale.

$h(-1) = -2, h(1) = 2$, deci graficul este segmentul (AB) (punctul A nu aparține graficului funcției).

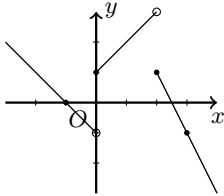
Problemă. Să se traseze graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , x < 0 \\ x + 1 & , x \in [0, 2) \\ -2x + 5 & , x \geq 2 \end{cases} .$$

S. Funcția f este definită prin restricția a trei funcții de gradul întâi la intervalele

$(-\infty, 0), [0, 2),$ respectiv $[2, \infty)$, deci graficul lui f este alcătuit din două semidrepte și un segment.

Coordonatele punctelor esențiale:



x	$-\infty$	-1	0	$[0$	$2)$	$[2$	3	∞
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	1	3	1	-1	$-\infty$

5.2. Ecuații și inecuații de gradul întâi

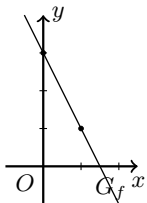
Definiție. O ecuație de forma $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ se numește **ecuație de gradul întâi**.

Soluția ecuației este $x = -\frac{b}{a}$.

Observație. De multe ori întâlnim ecuații care nu sunt de forma $ax + b = 0$, dar care prin transformări echivalente pot fi aduse la forma generală a ecuației de gradul întâi. În aceste cazuri începem rezolvarea ecuației cu determinarea domeniului de existență D .

Problemă. Să se rezolve prin două metode ecuația $-2x + 3 = 0$.

S. Soluția I (grafică). Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$.



Abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este soluția ecuației $f(x) = 0$. Trasăm graficul funcției ($f(0) = 3, f(1) = 1$) și citim valoarea (aproximativă) a soluției: $\frac{3}{2}$. Prin calcule directe (punând $x = \frac{3}{2}$ în ecuație) rezultă că $x = \frac{3}{2}$ este soluția ecuației.

Soluția II (algebrică).

$$-2x + 3 = 0 \stackrel{|-3}{\Leftrightarrow} -2x = -3 \stackrel{|:(-2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{-3}{-2}, \text{ deci } M = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

Problemă. Să se rezolve ecuația $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x-2}$.

S. Frațiile au sens dacă $x - 1 \neq 0$ și $2x - 2 \neq 0$, adică $x \neq 1$. Deci $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Într-o proporție, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x-2} \Rightarrow 2x - 2 = 3x - 3 \stackrel{|-2x+3}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Însă valoarea găsită nu aparține domeniului de existență, așadar mulțimea soluțiilor este $M = \emptyset$.

Dacă ecuația $ax + b = 0$, $x \in D$ conține un parametru m , atunci determinăm valorile lui m pentru care ecuația admite soluții și în acest caz rezolvăm ecuația.:

- dacă $a \neq 0$, atunci mulțimea soluțiilor este $M = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$;
- dacă $a = 0$ și
 - dacă $b = 0$, atunci orice $x \in D$ satisface ecuația: $M = D$;
 - dacă $b \neq 0$, atunci ecuația nu are soluții: $M = \emptyset$.

Problemă. Să se discute și să se rezolve ecuația $mx + 2 = 2x + 2m$, $m \in \mathbb{R}$.

S. Prin transformări echivalente, $mx - 2x = 2m - 2 \Leftrightarrow (m - 2)x = 2m - 2$. Discutăm după valorile lui m :

- dacă $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, atunci soluția este $x = \frac{2m-2}{m-2}$;
- dacă $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, atunci $0 \cdot x = 2$, deci $M = \emptyset$.

Definiție. Se numește **inecuație de gradul întâi** o inecuație de forma $ax + b \geq 0$ ($ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b < 0$), $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Soluția inecuației depinde de semnul lui a :

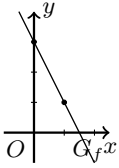
- dacă $a > 0$, atunci $M = \left[-\frac{b}{a}, \infty \right)$,
- dacă $a < 0$, atunci $M = \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right]$.

Problemă. Să se rezolve prin două metode inecuația $-2x + 3 < 0$.

S. Soluția I. (algebrică)

$$-2x + 3 < 0 \stackrel{|-3}{\Leftrightarrow} -2x < -3 \stackrel{|:(-2)}{\Leftrightarrow} x > \frac{-3}{-2}, \text{ deci } M = \left(\frac{3}{2}, \infty \right).$$

Soluția II. (grafică): Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.



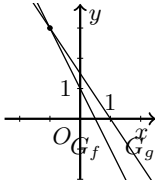
Soluțiile inecuației $f(x) < 0$ sunt date de abscisele punctelor de pe graficul lui f care se află sub axa Ox . Trasăm graficul funcției ($f(0) = 3, f(1) = 1$) și citim soluția: $M = (1,5; \infty)$.

Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute

Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} a_1x + b_1 = x \\ a_2x + b_2 = y \end{cases}$ este dată de coordonatele intersecției reprezentării geometrice a funcțiilor $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_1x + b_1$ și $f_2(x) = a_2x + b_2$.

Problemă. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$.

S. Din cele două ecuații, $y = 1 - 2x$ respectiv $y = \frac{3 - 3x}{2}$, deci considerăm funcțiile



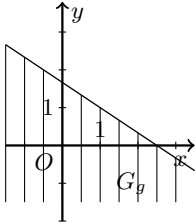
de gradul întâi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$ și $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$. Din reprezentarea geometrică a funcțiilor se vede că G_f și G_g se intersectează în punctul $(-1, 3)$. Aceste valori satisfac ecuațiile, deci soluția este $x = -1, y = 3$.

Inecuația de gradul întâi cu două necunoscute

Mulțimea punctele (x, y) din plan ale căror coordonate satisfac inegalitatea $ax + by + c \geq 0$ ($b \neq 0$) este semiplanul mărginit de reprezentarea geometrică a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-c - ax}{b}$ (o dreaptă).

Problemă. Să se rezolve: $2x + 3y - 5 < 0$.

S. Trasăm dreapta de ecuație $2x + 3y - 5 = 0$ (reprezentarea geometrică a graficului



funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = y = \frac{5 - 2x}{3}$. Punctul $O(0, 0)$ aparține mulțimii soluțiilor (pentru $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 5 = -5 < 0$), deci soluția este semiplanul mărginit de G_f care conține pe O .