MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

Cuprins

Glosar

1. Elemente de logică matematică

1.1. Propoziţii

Definiţie. Se numeşte **propoziţie** un enunţ declarativ despre care se poate decide dacă este adevărat sau fals.
Observaţie. O propoziţie nu poate fi în aceeaşi timp şi adevărată şi falsă.
Definiţie. Unei propoziţii îi putem atribui una din cele două **valori de adevăr** "1" sau "0": dacă propoziţia este adevărată, valoarea sa de adevăr este 1, iar valoarea de adevăr a unei propoziţii false este 0 ("1" şi "0" sunt simboluri, nu reprezintă numere).
Notaţie. Propoziţiile se notează cu literele mici $p, q, r, \ldots$.

Exemplu. Sunt propoziţii: "În fiecare pătrat există un unghi drept."- propoziţie adevărată, valoarea sa de adevăr este 1;
"suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu $110°$."-falsă, valoarea sa de adevăr este 0;
"Într-un triunghi echilateral toate laturile sunt de lungime egală."-adevărată, valoarea sa de adevăr este 1.

Nu sunt propoziţii (în sensul logicii matematice): "$x + 3 = 10$"- nu se poate decide dacă este advărată sau falsă: pentru $x = 7$, propoziţia "$7 + 3 = 10$" este adevărată, iar pentru alte valori ale lui x propoziţia este falsă;
"Într-un triunghi laturile sunt congruente."- în cazul triunghiului echilateral propoziţia este adevărată, în alte cazuri este falsă.

Negaţia unei propoziţii

Definiţie. Negaţia propoziţiei p este propoziţia "non p", notată $\neg p$ sau $\overline{p}$, care este adevărată dacă p este falsă şi falsă dacă p este adevărată.

Tabelul de adevăr al lui $\neg p$:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Observaţie. Propoziţia $\neg(\neg p)$ are aceeaşi valoarea de adevăr ca şi p.
Pentru a nega o propoziţie, se pune în faţa ei expresia "nu e adevărat că".

Exemplu. Negaţia propoziţiei adevărate p: "$2 + 3 > 4$" este $\neg p$: "$2 + 3 \not> 4$".
Negaţia propoziţiei false "Fiecare câine este neagră." este propoziţia adevărată "Există câine care nu este neagră".

Conjuncţia propoziţiilor

Definiţie. **Conjuncţia** propoziţiilor p, q este propoziţia "p şi q", notată $p \wedge q$, care este adevărată numai atunci când atât p cât şi q sunt adevărate, fiind falsă în celelate cazuri.

Tabelul de advăr al lui $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observaţie. Pentru a exprima conjuncţia propoziţiilor p, q, punem între cele două propoziţii cuvântul "şi".

Disjuncţia propoziţiilor

Definiţie. **Disjuncţia** propoziţiilor p, q este propoziţia "p sau q", notată $p \vee q$, care este falsă numai atunci când atât p cât şi q sunt false, fiind adevărată în celelate cazuri.

Tabelul de advăr al lui $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Observaţie. Pentru a exprima disjuncţia propoziţiilor p, q, punem între cele două propoziţii cuvântul "sau".

Definiţie. Din propoziţiile simple $p, q, r, \ldots$ prin aplicarea de un număr finit de ori a conectorilor logici $\neg, \vee, \wedge$ se pot crea **propoziţii compuse**.
Observaţie. Calculul propoziţiilor studiază propoziţiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului în raport cu valorile logice ale propoziţiilor simple care le compun.

Implicaţia propoziţiilor

Definiţie. Se numeşte **implicaţia** propoziţiilor p şi q propoziţia $((\neg p) \vee q)$ şi se notează $p \to q$ ("p implică q").

Tabelul de advăr al lui $p \to q$:

p	q	$\neg p$	$p \to q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Din tabelul de adevăr constatăm că $p \to q$ este falsă numai dacă p este adevărată şi q este falsă, fiind adevărată în celelate cazuri.
Observaţie. Implicaţia propoziţiilor p, q se exprimă astfel: "dacă p atunci q". În implicaţia $p \to q$ p se numeşte **ipoteză**, iar q se numeşte **concluzia** implicaţiei.

Exemplu. Considerând propoziţiile p: "Numărul 2 este par." şi q: "Pământul este sferic.”:

- $p \to q$: “Dacă numărul 2 este par atunci Pământul este sferic.”- propoziţie falsă, ipoteza fiind adevărată şi concluzia falsă;
- $q \to p$: “Dacă Pământul este sferic, atunci numărul 2 este par.”- propoziţie adevărată, ipoteza fiind falsă şi concluzia adevărată.

Echivalenţa propoziţiilor

Definiţie. Propoziţia $(p \to q) \wedge (q \to p)$ se numeşte **echivalenţa propoziţiilor** p, q şi se notează cu $p \leftrightarrow q$, “p echivalent cu q”). Din tabelul de adevăr constatăm că $p \leftrightarrow q$ este adevărată numai dacă p şi q sunt simultan adevărate sau simultan false, fiind adevărată în celelate cazuri.

Tabelul de adevăr al lui $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Observaţie. Echivalenţa propoziţiilor p, q se exprimă astfel: “p dacă şi numai dacă q”..

Definiţie. Cu literele $p, q, r, \ldots$ şi cu simbolurile conectori logici $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ se formează **formule logice**.
Exemplu. Formulă logică: $p \vee (q \to \neg p)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.
Definiţie. O formulă se numeşte **tautologie** dacă propoziţia obţinută este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor înlocuite.
Definiţie. Dacă formulele α şi β se compun din aceleaşi $p, q, r, \ldots$ şi pentru orice înlocuire a literelor cu propoziţii, cele două propoziţii obţinute au aceeaşi valoare de adevăr, atunci formulele α şi β se numesc **echivalente**.
Notaţie. Echivalenţa formulelor α şi β se notează astfel: $\alpha \equiv \beta$ sau $\alpha \Leftrightarrow \beta$.
Echivalenţa a două formule se demonstrează prin completarea tabelului de adevăr, examinând toate posibilităţile de valori de adevăr ale propoziţiilor componente.

Problemă. *Să arătăm că* $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$.
S. Valorile de adevăr din coloana corespunzătoare lui $p \to q$ coincid cu valorile de adevăr din coloana lui $\neg q \to \neg p$.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

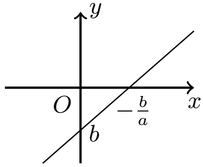
5. Funcţii numerice, ecuaţii

5.1. Funcţia de gradul întâi

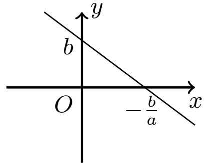
Definiţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ se numeşte **funcţia de gradul întâi.**

Reprezentarea geometrică a funcţiei de gradul întâi este o dreaptă.

Dacă $a > 0$:



Dacă $a < 0$:



Tabelul de variaţie şi de semn

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
dacă $a > 0$, $f(x)$	$-\infty$	$- \nearrow -$	0	$+ \nearrow +$	$+\infty$
dacă $a < 0$, $f(x)$	$+\infty$	$+ \searrow +$	0	$- \searrow -$	$-\infty$

Problemă. *Fie f o funcţie de gradul întâi. Să se demonstreze că funcţia $f \circ f$ este strict crestătoare!*

S. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Atunci

$$(f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$$

o funcţie de gradul întâi. Coeficientul lui x $\left(a^2\right)$ fiind pozitiv, f este strict crescătoare.

Problemă. *Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$!*

S. Funcţia f fiind de gradul întâi, f este strict crescătoare dacă şi numai dacă coeficientul lui x este strict pozitiv: $3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Problemă. *Să se determine funcţia de gradul întâi al cărei grafic trece prin punctele $A(2, 7)$ şi $B(-3, -18)$.*

S. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$A, B \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 7, f(-3) = -18 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b & = 7 \\ -3a + b & = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 5 \\ b & = -3 \end{cases}$$

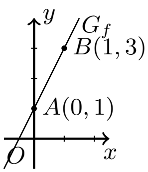
Deci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$.

Proprietăţile funcţiei de gradul întâi

Definiţie	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
Imaginea lui f	$Imf = \mathbb{R}$
Puncte de intersecţie cu axele	$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$ $G_f \cap Ox = \left\{\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$
Peiodicitate	nu este periodică
Paritate	dacă $b = 0$, f este impară, centru de simetrie: O dacă $b \neq 0$, f nu este pară, nu este impară
Continuitate	continuă pe $\mathbb{R}$
Asimptote	asimptotă oblică la $\pm\infty$: $y = ax + b$
Mărginire	nu este mărginită
Monotonie	dacă $a > 0$, f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $a < 0$, f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$
Semnul funcţiei	dacă $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ dacă $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$
Bijectivitate	f este bijectivă
Funcţia inversă	$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Problemă. *Să se traseze graficul funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = 2x + 1$.

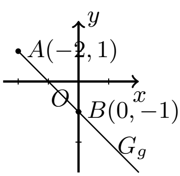
S. f fiind o funcţie de gradul întâi, graficul lui f este o dreaptă.



Pentru a desena graficul este de ajuns să aflăm două puncte de pe dreaptă. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, deci dreapta este determinată de punctele $A(0, 1)$ şi $B(1, 3)$.

Problemă. *Să se traseze graficul funcţiei* $g : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = -x - 1$.

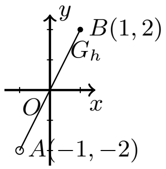
S. g este restricţia unei funcţii de gradul întâi la intervalul $[-2, \infty)$, aşadar graficul lui g este aceea “jumătatea” a unei drepte, unde $x \geq -2$, deci o semidreaptă.



Pentru a desena semidreapta este suficient să desenăm originea ($x = 2$) semidreptei şi un punct oarecare al ei. $g(-2) = 1$, $g(0) = -1$, deci semidreapta este determinată de punctul de origine $A(-2, 1)$ şi de punctul $B(0, -1)$.

Problemă. *Să se traseze graficul funcţiei* $h : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x$.

S. h este restricţia unei funcţii de gradul întâi la intervalul $(-1, 1]$, deci graficul lui

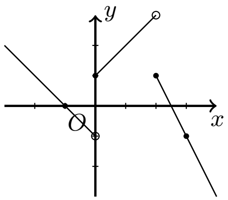


h este aceea parte a dreptei unde abscisa aparţine domeniului de existenţă, deci un segment. Pentru desenarea segmentului este necesară desenarea celor două puncte finale.
$h(-1) = -2$, $h(1) = 2$, deci graficul este segmentul $(AB]$ (punctul A nu aparţine graficului funcţiei).

Problemă. *Să se traseze graficul funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & , x < 0 \\ x+1 & , x \in [0,2) \\ -2x+5 & , x \geq 2 \end{cases} .$$

S. Funcţia f este definită prin restricţia a trei funcţii de gradul întâi la intervalele



$(-\infty, 0)$, $[0, 2)$, respectiv $[2, \infty)$, deci graficul lui f este alcătuită din două semidrepte şi un segment. Coordonatele punctelor esenţiale:

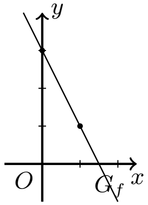
x	$-\infty$	-1	$0)$	$[0$	$2)$	$[2$	3	∞
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	1	3	1	-1	$-\infty$

5.2. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul întâi

Definiţie. O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numeşte **ecuaţie de gradul întâi**.
Soluţia ecuaţiei este $x = -\frac{b}{a}$.
Observaţie. De multe ori întâlnim ecuaţii care nu sunt de forma $ax + b = 0$, dar care prin transformări echivalente pot fi aduse la forma generală a ecuaţiei de gradul întâi. În aceste cazuri începem rezolvarea ecuaţiei cu determinarea domeniului de existenţă D.

Problemă. *Să se rezolve prin două metode ecuaţia* $-2x + 3 = 0$.

S. Soluţia I (grafică). Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.



Abscisa punctului de intersecţie a graficului funcţiei f çu axa Ox este soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$. Trasăm graficul funcţiei ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$) şi citim valoarea (aproximativă) a soluţiei: $\frac{3}{2}$. Prin calcule directe (punând $x = \frac{3}{2}$ în ecuaţie) rezultă că $x = \frac{3}{2}$ este soluţia ecuaţiei.

Soluţia II (algebrică).

$$-2x+3=0 \overset{|-3}{\Leftrightarrow} -2x=-3 \overset{|:(-2)}{\Leftrightarrow} x=\frac{-3}{-2}, \text{ deci } M=\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Problemă. *Să se rezolve ecuaţia* $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3}{2x-2}$.

S. Fracţiile au sens dacă $x-1\neq 0$ şi $2x-2\neq 0$, adică $x\neq 1$. Deci $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Într-o proporţie, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{3}{2x-2} \Rightarrow 2x-2=3x-3 \overset{|-2x+3}{\Leftrightarrow} x=1.$$

Însă valoarea găsită nu aparţine domeniului de existenţă, aşadar mulţimea soluţiilor este $M=\emptyset$.

Dacă ecuaţia $ax+b=0$, $x\in D$ conţine un parametru m, atunci determinăm valorile lui m pentru care ecuaţia admite soluţii şi în acest caz rezolvăm ecuaţia.:

- dacă $a\neq 0$, atunci mulţimea soluţiilor este $M=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$;
- dacă $a=0$ şi
  - dacă $b=0$, atunci orice $x\in D$ satisface ecuaţia: $M=D$;
  - dacă $b\neq 0$, atunci ecuaţia nu are soluţii: $M=\emptyset$.

Problemă. *Să se discute şi să se rezolve ecuaţia* $mx+2=2x+2m$, $m\in\mathbb{R}$.

S. Prin transformări echivalente, $mx-2x=2m-2 \Leftrightarrow (m-2)x=2m-2$. Discutăm după valorile lui m:

- dacă $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$, atunci soluţia este $x=\frac{2m-2}{m-2}$;
- dacă $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, atunci $0\cdot x=2$, deci $M=\emptyset$.

Definiţie. Se numeşte **inecuaţie de gradul întâi** o inecuaţie de forma $ax+b\geq 0$ ($ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b<0$), $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.
Soluţia inecuaţiei depinde de semnul lui a:

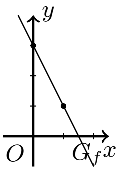
- dacă $a>0$, atunci $M=\left[-\dfrac{b}{a},\infty\right)$,
- dacă $a<0$, atunci $M=\left(-\infty,-\dfrac{b}{a}\right]$.

Problemă. *Să se rezolve prin două metode inecuaţia* $-2x+3<0$.

S. Soluţia I. (algebrică)

$$-2x+3<0 \overset{|-3}{\Leftrightarrow} -2x<-3 \overset{|:(-2)<0}{\Leftrightarrow} x>\frac{-3}{-2}, \text{ deci } M=\left(\frac{3}{2},\infty\right).$$

Soluţia II. (grafică): Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$.



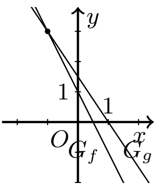
Soluţiile inecuaţiei $f(x) < 0$ sunt date de abscisele punctelor de pe graficul lui f care se află sub axa Ox. Trasăm graficul funcţiei ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$) şi citim soluţia: $M = (1{,}5; \infty)$.

Sisteme de ecuaţii liniare cu două necunoscute

Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} a_1x + b_1 & = x \\ a_2x + b_2 & = y \end{cases}$ este dată de coordinatele intersecţiei reprezentării geometrice a funcţiilor $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1x + b_1$ şi $f_2(x) = a_2x + b_2$.

Problemă. *Să se rezolve sistemul* $\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x + 2y & = 3 \end{cases}$.

S. Din cele două ecuaţii, $y = 1 - 2x$ respectiv $y = \dfrac{3 - 3x}{2}$, deci considerăm funcţiile de gradul întâi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$ şi $g(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$. Din reprezentarea geometrică a funcţiilor se vede că G_f şi G_g se intersectează în punctul $(-1, 3)$. Aceste valori satisfac ecuaţiile, deci soluţia este $x = -1$, $y = 3$.



Inecuaţia de gradul întâi cu două necunoscute

Mulţimea punctele (x, y) din plan ale căror coordinate satisfac inegalitatea $ax + by + c \geq 0$ ($b \neq 0$) este semiplanul mărginit de reprezentarea geometrică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-c - ax}{b}$ (o dreaptă).

Problemă. *Să se rezolve:* $2x + 3y - 5 < 0$.

S. Trasăm dreapta de ecuaţie $2x + 3y - 5 = 0$ (reprezentarea geometrică a graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = y = \dfrac{5 - 2x}{3}$. Punctul $O(0, 0)$ aparţine mulţimii soluţiilor (pentru $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 5 = -5 < 0$), deci soluţia este semiplanul mă rginit de G_f care conţine pe O.