MATEMATICĂ

GEOMETRIE ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND
CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

FOLOSIREA FIȚUICILOR
ESTE O FRAUDĂ.
NU RECOMANDĂM
UTILIZAREA LOR ÎN TIMPUL
EXAMENELOR!

Cuprins

1. Vectori

1.1. Segmente orientate. Vectori în plan

Segmente orientate

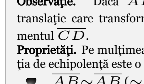
Definiţie. Perechea ordonată de puncte (A, B) se numeşte **segment orientat** şi se notează cu $\overline{AB}$.

Definiţie. Segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt **echipolente** (se notează cu $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), dacă mijlocul segmentului $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.

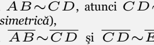
Observaţie. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci există o translaţie care transformă segmentul $\overline{AB}$ în segmentul $\overline{CD}$.

Proprietăţi. Pe mulţimea segmentelor orientate relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă:

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *reflexivă*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *simetrică*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ şi $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, atunci $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ ($\sim$ este *tranzitivă*).



$\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente dacă şi numai dacă $ABDC$ este paralelogram sau punctele A, B, C, D sunt coliniare şi mijlocul lui $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.



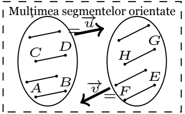
Vectori

Definiţie. Se numeşte **vector** mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment dat.
Notaţie. Vectorul determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$ (sau cu litere mici): $\overrightarrow{AB}=\left\{\overline{CD} \mid \overline{CD}\sim\overline{AB}\right\}$.

Observaţie. Dacă $\overline{AB}\sim\overline{CD}$, atunci $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Dacă $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, atunci spunem că segmentul $\overline{AB}$ (sau $\overline{CD}$) este un **reprezentant** al vectorului $\overrightarrow{u}$.
Definiţie. Lungimea (sau **modulul**) unui vector este lungimea oricărui reprezentant al său şi se notează cu $|\overrightarrow{u}|$.

Definiţie. Vectorul de lungime nulă $\overrightarrow{AA}$ se numeşte **vectorul nul** şi se notează $\vec{0}$.

Definiţie. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt **egali** ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), dacă segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente.
Observaţie. Doi vectori sunt egali dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi sens.
Teoremă. (*Existenţa reprezentantului cu origine dată*) Pentru orice vector $\overrightarrow{u}$ şi orice punct M, există un unic segment orientat $\overline{MM'}$ pentru care $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$.
Consecinţă. Dacă $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$, atunci $A=B$.



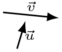
$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\ldots, \overrightarrow{v}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}=\ldots,$
$\overline{CD}$ este un reprezentant al vectorului $\overrightarrow{u}$,
$\overline{EF}$ este un reprezentant al lui $\overrightarrow{v}$,
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

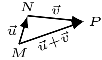
1.2. Operaţii cu vectori

Suma a doi vectori

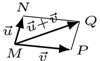
Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ se defineşte în felul următor.

- (*Regula triunghiului*): fie M un punct oarecare, atunci există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{v}$. Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este vectorul $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MP}$.
- (*Regula paralelogramului*): dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ nu sunt coliniare, fie M un punct oarecare; atunci există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{v}$; se construieşte paralelogramul $MNQP$. Suma vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este vectorul $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MQ}$.





Regula triunghiului



Regula paralelogramului

Proprietăţile adunării vectorilor

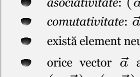
Definiţie. **Opusul** vectorului $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Proprietăţi. Pentru orice vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

- *asociativitate*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- *comutativitate*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- există element neutru $\left(\vec{0}\right)$ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- orice vector $\vec{a}$ are un opus $(-\vec{a})$: $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

Problemă. *Fie M un punct oarecare situat în planul paralelogramului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.*

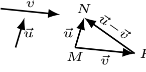
S. În paralelogramul $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$.



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})=$
$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Scăderea vectorilor

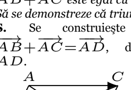
Diferenţa a doi vectori $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ se defineşte prin relaţia $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ şi se construieşte în felul următor: fie M un punct oarecare; există punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{v}$. Atunci $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{PN}$.



Pentru orice puncte M, N, P $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}$.

Problemă. *În triunghiul ABC modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ este egal cu modulul vectorului $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic!*

S. Se construieşte paralelogramul $ABCD$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, deci $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=AD$.



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}==\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$, deci $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=CB$.

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|\Rightarrow AD=BC$, deci paralelogramul $ABCD$ este un dreptunghi; astfel, $m(\widehat{BAC})=90^{\circ}$.

Înmulţirea unui vector cu un scalar

Definiţie. Produsul dintre vectorul $\vec{u}\neq\vec{0}$ şi numărul real $\alpha\in\mathbb{R}^*$ este vectorul notat $\alpha\vec{u}$ care

- are aceiaşi direcţie cu vectorul deînmulţit $\vec{u}$;
- dacă $\alpha>0$, atunci are acelaşi sens, dacă $\alpha<0$, are sens opus cu $\vec{u}$;
- are modululul egal cu $|\alpha|\cdot|\vec{u}|$.

Dacă $\vec{u}=\vec{0}$ sau $\alpha=0$, atunci $\alpha\cdot\vec{u}=\vec{0}$.

Proprietăţi

Proprietăţi. Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$ vectori şi α,β numere reale oarecare, atunci

- $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$;
- $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$;
- $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$;
- $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$;
- $(-\alpha)\vec{u}=\alpha(-\vec{u})=-(\alpha\vec{u})$.

Problemă. *În triunghiul ABC fie M mijlocul segmentului $[BC]$. Să se demonstreze că* $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

S. Conform regulei triunghiului,

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}2\overrightarrow{AM}=$$

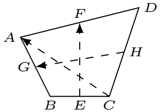
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}}_{=\vec{0}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

deci $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Problemă. *Fie* $ABCD$ *un patrulater şi fie* E, F, G, H *mijloacele laturilor* $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[CD]$. *Să se demonstreze că* $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$.

S. G este mijlocul lui $[AB]$, deci $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Analog, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{HD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=$$
$$=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})+(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG})=$$
$$=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AG})=$$
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=$$
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\cdot\vec{0}=\overrightarrow{CA}.$$

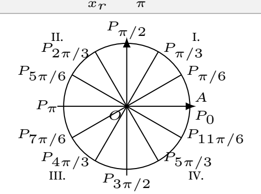
3. Trigonometrie

3.1. Elementele trigonometriei

Măsura unghiurilor în radiani

Definiţie. Raportul dintre semiperimetrul şi raza unui cerc este constant şi se notează prin π (valoarea aproximativă este $\pi \approx 3,1415$).
Definiţie. Măsura unui unghi la centrul unui cerc cuprinzând un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului este de 1 **radian**.
Observaţie. Dacă α este măsura unui unghi în grade iar x_r este măsura unghiului în radiani, atunci este adevărată relaţia

$$\frac{\alpha}{x_r} = \frac{180}{\pi}.$$

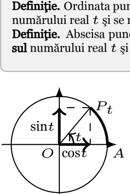


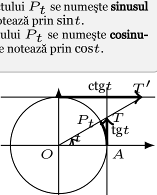
Cercul trigonometric

Definiţie. Fie xOy un reper cartezian. Cercul cu centrul în O şi cu raza egală cu 1 pe care este indicat **sensul trigonometric direct** (invers acelor ceasornicului) se numeşte **cercul trigonometric**.
Notaţie. Fie $t \in \mathbb{R}$ un număr real. Atunci există un unic punct P_t pe cercul trigonometric pentru care $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Sinusul şi cosinusul

Fie t un număr real şi P_t punctul pentru care $m(\widehat{AOP_t}) = t$.
Definiţie. Ordinata punctului P_t se numeşte **sinusul** numărului real t şi se notează prin $\sin t$.
Definiţie. Abscisa punctului P_t se numeşte **cosinusul** numărului real t şi se notează prin $\cos t$.





Tangenta şi cotangenta

Definiţie. Fie d_{tg} dreapta verticală de ecuaţie $x=1$ şi fie d_{ctg} dreapta orizontală de ecuaţie $y=1$.

Definiţie. Fie $t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ şi T intersecţia dreptelor OP_t şi d_{tg}. Ordinata punctului T se numeşte **tangenta** numărului t şi se notează prin $\text{tg}t$.

Definiţie. Fie $t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ şi fie T' intersecţia dreptelor OP_t şi d_{ctg}. Abscisa punctului T' se numeşte **cotangenta** numărului real t şi se notează prin $\text{ctg}t$.

Valori remarcabile

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$
$\text{ctg}x$	$\mid$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Valori remarcabile

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	|

Reducerea la primul cadran

$x \in C_2$	$x \in C_3$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
$\mathrm{tg} x = -\mathrm{tg}(\pi - x)$	$\mathrm{tg} x = \mathrm{tg}(x - \pi)$
$\mathrm{ctg} x = -\mathrm{ctg}(\pi - x)$	$\mathrm{ctg} x = \mathrm{ctg}(x - \pi)$

$x \in C_4$
$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\mathrm{tg} x = -\mathrm{tg}(2\pi - x)$
$\mathrm{ctg} x = -\mathrm{ctg}(2\pi - x)$

1. Numere reale, mulţimi reale

Definiţie. Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este **finită**, dacă există un număr real n şi o funcţie bijectivă $f: A \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiţie. Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este **mărginită inferior**, dacă există $m \in \mathbb{R}$ pentru care $m \leq x$, $\forall x \in A$. Numărul m este un **minorant** al mulţimii A.

Definiţie. Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este **mărginită superior**, dacă există $M \in \mathbb{R}$ pentru care $M \geq x$, $\forall x \in A$. Numărul M este un **majorant** al mulţimii A.

Definiţie. Dacă mulţimea $A \neq \emptyset$ este mărginită inferior, atunci A admite un cel mai mare minorant, care se notează $m = \inf A$ ("m este inferior (infimum) de A").

Teoremă. Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Urmă toarele afirmaţii sunt echivalente:

1. $m \in \mathbb{R}$ este infimum de A;
2. $a \geq m, \forall a \in A$ şi $\forall \varepsilon > 0$,
   $\exists a_\varepsilon \in A$, pentru care $a_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Definiţie. Dacă mulţimea $A \neq \emptyset$ este mărginită superior, atunci A admite un cel mai mic majorant, care se notează $M = \sup A$ ("M este superior (supremum) de A").

Teoremă. Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. $M \in \mathbb{R}$ este supremum de A;
2. $a \leq M, \forall a \in A$ şi $\forall \varepsilon > 0$,
   $\exists a_\varepsilon \in A$, pentru care $a_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Definiţie. Dacă mulţimea A este nemărginită inferior (superior), atunci spunem că $\inf A=-\infty$ ($\sup A=+\infty$).
$\inf\mathbb{R}=-\infty, \sup\mathbb{R}=+\infty$,
$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Proprietăţi. Operaţiile algebrice pe mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ au următoarele proprietăţi:

- $x+(+\infty)=(+\infty)+x=(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \forall x\in\mathbb{R}$;
- $x-(+\infty)=-(+\infty)+x=x+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $\forall x\in\mathbb{R}$;
- $x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=\begin{cases} +\infty & \text{, dacă } x>0 \\ -\infty & \text{, dacă } x<0 \end{cases}$;
- $\dfrac{x}{+\infty}=\dfrac{x}{-\infty}=0, \forall x\in\mathbb{R}$;
- $\infty\cdot\infty=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$, $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$.

Vecinătăţi

Definiţie. Se numeşte **vecinătate** a numărului x_0 o mulţime care include un interval deschis în care se află x_0. O astfel de mulţime o notăm cu $V(x_0)$:

$$V(x_0) \text{ vecinătate lui } x_0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0 \text{ astfel încât } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subseteq V(x_0).$$

Vecinătăţi

Proprietăţi. Veciniătăţile numărului real x_0 au următoarele proprietăţi:

- orice vecinătate a lui x_0 conţine pe x_0;
- dacă V este o vecinătate a lui x_0 şi $V \subseteq U$, atunci şi U este o vecinătate a lui x_0;
- intersecţia a două vecinătăţi ale lui x_0 este o vecinătate a lui x_0;
- pentru orice vecinătate V a lui x_0 există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât V este o vecinătate a oricărui număr din U.

Teoremă. Dacă $x \neq y$, atunci există mulţimile V_x şi V_y, V_x o vecinătate a lui x, V_y o vecinătate a lui y astfel încât $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Punct de acumulare, punct izolat

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ o mulţime.

Definiţie. Numărul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii A dacă oricare vecinătate a lui x_0 conţine o infinitate de puncte din A. Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează cu A'.

Definiţie. Dacă $x_0 \in A$ şi x_0 nu este punct de acumulare, atunci x_0 se numeşte **punct izolat** al mulţimii A.

Exemplu. Dacă A este o mulţime finită, atunci A nu are puncte de acumulare, fiacare număr din A este un punct izolat.

Mulţimea punctelor de acumulare ale intervalului $A = (a, b)$ este $A' = [a, b]$.

3. Limite de funcţii

3.1. Limita unei funcţii

Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ are **limita** $l\in\overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru oricare vecinătate V_l a lui l există o vecinătate U_{x_0} a lui x_0 astfel încât, $\forall x\in U^*_{x_0}\cap D\Rightarrow f(x)\in V_l$.

Notaţie. Dacă func tia $f:D\to\mathbb{R}$ are limita l în $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $l\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci se scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

Teoremă. *(Definiţia limitei după Heine)* Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $l\in\overline{\mathbb{R}}$. Afirmaţiile următoare sunt echivalente:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$,
- $\forall (x_n)_{n\geq 1}, x_n\in D$, $x_n\neq x_0$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

Problemă. *Să se arate că funcţia* $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ *nu are limită în punctul* $x_0=0$*!*

S. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(x'_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n=\dfrac{1}{n\pi}, x'_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$.

Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$ şi

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$,

$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x'_n} =$

$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1$, deci (din definiţia după Heine) f nu are limită în punctul x_0.

Limită în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$

Definiţie. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ atunci $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiţie. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ atunci $f(x) > \varepsilon$.

Definiţie. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a. î. dacă $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ atunci $f(x) < -\varepsilon$.

Problemă. *Să se arate că* $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \infty$*!*

S. Trebuie arătat că $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ a. î. dacă $|x| < \delta$, $x \neq 0$, atunci $f(x) > \varepsilon$.

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon},\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right).$$

Dacă $\delta=\min\left\{\left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|,\left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|\right\}$,

atunci $|x|<\delta\Rightarrow f(x)<\varepsilon$.

Limită în $+\infty$

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x>\delta(\varepsilon)$ atunci $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x>\delta(\varepsilon)$ atunci $f(x)>\varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x>\delta(\varepsilon)$, atunci $f(x)<-\varepsilon$.

Limită în $-\infty$

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x<-\delta(\varepsilon)$ atunci $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x<-\delta(\varepsilon)$ atunci $f(x)>\varepsilon$.

Definiţie. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ a. î. dacă $x<-\delta(\varepsilon)$, atunci $f(x)<-\varepsilon$.

Limite laterale

Definiţie. Funcţia $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ are **limita laterală la stânga** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru oricare vecinătate V_l a lui l există o vecinătate U_{x_0} a lui x_0 astfel încât $\forall x \in U^*_{x_0} \cap D, x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V_l$.

Notaţie. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Teoremă. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in D, x_n < x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Observaţie. În mod analog se defineşte limita laterală la dreapta.

Teoremă. Fie funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii D. Funcţia f are limită în punctul x_0 dacă şi numai dacă există limitele laterale la stânga şi la dreapta şi acestea sunt egale.