

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND
CERINTELOR DE BACALAUREAT 2016

FOLOSIREA FIȚUICILOR
ESTE O FRAUDĂ.
NU RECOMANDĂM
UTILIZAREA LOR ÎN TIMPUL
EXAMENELOR!

Cuprins

1. Elemente de logică matematică	1
1.1. Propoziții	1
1.2. Predicate	6
1.3. Mulțimi	9
1.4. Inducția matematică	12
2. Numere reale	17
2.1. Numere reale	17
2.2. Puteri	25
2.3. Radicali	28
2.4. Logaritmi	32
3. Șiruri, progresii	37
3.1. Șiruri	37
3.2. Progresii aritmetice	42
3.3. Progresii geometrice	45
4. Funcții	49
4.1. Noțiunea de funcție	49
4.2. Operații cu funcții numerice	52
4.3. Proprietățile funcțiilor	66
4.4. Funcții bijective	75
4.5. Graficul unei funcții	87
4.6. Graficul și proprietățile funcției	91
5. Funcții numerice, ecuații	103
5.1. Funcția de gradul întâi	103
5.2. Ecuații și inecuații de gradul întâi	108
5.3. Funcția de gradul al doilea	113
5.4. Ecuații de gradul al doilea	122
5.5. Funcția putere cu exponent natural	130
5.6. Funcția putere cu exponent negativ	134
5.7. Funcția radical	138

5.8. Ecuații iraționale	142
5.9. Funcția exponențială	146
5.10. Ecuații exponențiale	149
5.11. Funcția logaritmică	155
5.12. Ecuații logaritmice	160
5.13. Funcția sinus	170
5.14. Funcția arcsinus	175
5.15. Funcția cosinus	180
5.16. Funcția arccosinus	183
5.17. Funcția tangentă	188
5.18. Funcția arctangentă	191
5.19. Funcția cotangentă	194
5.20. Funcția arccotangentă	197
6. Numere complexe	201
6.1. Mulțimea numerelor complexe	201
6.2. Forma algebrică	204
6.3. Reprezentarea geometrică	209
6.4. Forma trigonometrică	215
6.5. Rădăcinile de ordinul n	222
6.6. Ecuații binome și bievadrate	224
7. Elemente de combinatorică	227
7.1. Reguli generale ale combinatoricii	227
7.2. Permutări	233
7.3. Grupul S_n	234
7.4. Aranjamente	243
7.5. Combinări	244
7.6. Binomul lui Newton	246
8. Statistică și probabilități	249
8.1. Matematică financiară	249
8.2. Elemente de statistică matematică	253
8.3. Calculul probabilităților	258
9. Matrice și determinanți	264

9.1. Matrice	264
9.2. Determinanți	273
9.3. Aplicații ale determinantilor în geometrie	282
9.4. Matrice inversabile	284
9.5. Rangul unei matrice	287
10. Sisteme de ecuații liniare	292
11. Structuri algebrice	302
11.1. Legi de compoziție	302
11.2. Grupuri	319
11.3. Subgrupuri	325
11.4. Morfisme de grupuri	328
11.5. Inele și corpuri	332
12. Polinoame	337
12.1. Inel de polinoame	337
12.2. Forma algebrică a unui polinom	338

1. Elemente de logică matematică

1.1. Propoziții

Definiție. Se numește **propoziție** un enunț declarativ despre care se poate decide dacă este adevărat sau fals.

Observație. O propoziție nu poate fi în aceeași timp și adevărată și falsă.

Definiție. Unei propoziții îi putem atribui una din cele două **valori de adevăr** "1" sau "0": dacă propoziția este adevărată, valoarea sa de adevăr este 1, iar valoarea de adevăr a unei propoziții false este 0 ("1" și "0" sunt simboluri, nu reprezintă numere).

Notatie. Propozițiile se notează cu literele mici $p, q, r, \dots$

Exemplu. Sunt propoziții: "În fiecare pătrat există un unghi drept." - propoziție adevărată, valoarea sa de adevăr este 1; "suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 110° ." - falsă, valoarea sa de adevăr este 0; "Într-un triunghi echilateral toate laturile sunt de lungime egală." - adevărată, valoarea sa de adevăr este 1.

Nu sunt propoziții (în sensul logicii matematice): " $x+3=10$ " - nu se poate decide dacă este adevărată sau falsă: pentru $x=7$, propoziția " $7+3=10$ " este adevărată, iar pentru alte valori ale lui x propoziția este falsă;

"Într-un triunghi laturile sunt congruente." - în cazul triunghiului echilateral propoziția este adevărată, în alte cazuri este falsă.

Negația unei propoziții

Definiție. Negația propoziției p este propoziția “non p ”, notată $\neg p$ sau $\overline{p}$, care este adevărată dacă p este falsă și falsă dacă p este adevărată.

Tabelul de adevăr
al lui $\neg p$:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Observație.

Propoziția $\neg(\neg p)$ are aceeași valoare de adevăr ca și p .

Pentru a nega o propoziție, se pune în fața ei expresia “nu e adevărat că”.

Exemplu. Negația propoziției adevărate p : “ $2 + 3 > 4$ ” este $\neg p$: “ $2 + 3 \not> 4$ ”.

Negația propoziției false “Fiecare câine este neagră.” este propoziția adevărată

“Există câine care nu este neagră”.

Conjuncția propozițiilor

Definiție. Conjuncția propozițiilor p , q este propoziția “ p și q ”, notată $p \wedge q$, care este adevărată

Tabelul de adevăr al lui

$p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

numai atunci când atât p cât și q sunt adevărate, fiind falsă în celelalte cazuri.

Observație. Pentru a exprima conjuncția propozițiilor p , q , punem între cele două propoziții cuvântul “și”.

Disjuncția propozițiilor

Definiție. **Disjuncția** propozițiilor p, q este propoziția “ p sau q ”, notată $p \vee q$, care este falsă numai

Tabelul de adevăr al lui

$p \vee q$:		
p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

atunci când atât p cât și q sunt false, fiind adevărată în celelalte cazuri.

Observație. Pentru a exprima disjuncția propozițiilor p, q , punem între cele două propoziții cuvântul “sau”.

Definiție. Din propozițiile simple $p, q, r, \dots$ prin aplicarea de un număr finit de ori a conectorilor logici $\neg, \vee, \wedge$ se pot crea **propoziții compuse**.

Observație. Calculul propozițiilor studiază propozițiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului în raport cu valorile logice ale propozițiilor simple care le compun.

3. Șiruri, progresii

3.1. Șiruri

Definiție. Fie A o mulțime nevidă. O funcție $f : \mathbb{N}^* \rightarrow A$ se numește **șir de elemente din mulțimea A** .

Notăție. Valoarea $f(n)$ se numește *termenul de rang n* al șirului și îl notăm a_n (b_n , c_n). Șirul se notează cu litere mici: (a_n) , $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, (b_n) .

Definiție. Dacă A este o mulțime de numere reale, funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow A$ se numește **șir de numere reale**.

Moduri de definire a unui șir

Un șir poate fi definit:

- descriptiv (prin descriere): termenul de rang n . este definit printr-o proprietate, sau scriem câțiva termeni ai șirului, până când regula de obținere este clară;
- cu ajutorul unei formule care permite să se găsească orice termen al său;
- recurent: se dă primul termen al șirului (sau câțiva din primii termeni), respectiv o formulă care exprimă orice termen al șirului, de la un rang oarecare, prin precedenții (unul sau mai mulți).

Problemă. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $x_n = -10 + 7n$, $\forall n \geq 1$. Să se scrie primii trei termeni ai şirului! Este termen al acestui şir numărul 99, respectiv 123?

S. $x_1 = -10 + 7 \cdot 1 = -3$, $x_2 = -10 + 7 \cdot 2 = 4$, $x_3 = -10 + 7 \cdot 3 = 11$.

Numărul 99 este un termen al şirului dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k = 99 \Leftrightarrow$

$-10 + 7k = 99 \Leftrightarrow k = \frac{109}{7} \notin \mathbb{N}^*$. Deci 99 nu face parte din şir.

Dacă $x_k = 123$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $-10 + 7k = 123 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{133}{7} = 19 \in \mathbb{N}^*$. Deci 123 este termenul de rang 19.

Problemă. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_n = 2x_{n-1} + 1$, $\forall n \geq 1$, $x_1 = 1$. Să se scrie primii patru termeni ai şirului şi să se determine termenul general!

S. $x_1 = 1$; în relaţia de recurenţă înlocuind $n = 2$, respectiv $n = 3$, $n = 4$, rezultă că $x_2 = 2x_1 + 1 = 3$, $x_3 = 2x_2 + 1 = 7$, $x_4 = 2x_3 + 1 = 15$.

Cu metoda inducţiei matematice demonstrăm că

$x_n = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n)$: " $x_n = 2^n - 1$ ", $n \in \mathbb{N}^*$.

I. $n = 1$: $P(1)$: " $x_1 = 2^1 - 1$ ".

II. Presupunem că $x_k = 2^k - 1$ şi demonstrăm că $x_{k+1} = 2^{k+1} - 1$:

$$x_{k+1} \stackrel{rec.}{=} 2x_k + 1 \stackrel{ip.}{=} 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Șiruri mărginite

Definiție. Un șir (a_n) este **mărginit** dacă există două numere reale m și M , astfel încât $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Teoremă. Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problemă. Să se demonstreze că șirul (a_n) ,

$$a_n = \frac{n+2}{2n+3} \text{ este mărginit.}$$

S. Scriem câțiva din primii termeni: $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_2 = \frac{4}{7}$, $a_3 = \frac{5}{9}$. Demonstrăm că termenii șirului sunt mai mici decât 1:

$$\begin{aligned} a_n < 1 &\Leftrightarrow \frac{n+2}{2n+3} < 1 \Leftrightarrow n+2 < 2n+3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < n+1. \end{aligned}$$

Evident, 0 este o margine inferioară, deci $0 < a_n < 1$.

Problemă. Să se demonstreze că șirul $x_0 \in [-5, 2]$, $x_{n+1} = 2 \sin(x_n) + 1$ este mărginit!

S. $\sin(x_n) \in [-1, 1] \Rightarrow 2 \sin(x_n) \in [-2, 2] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin(x_n) + 1 \in [-1, 3] \Rightarrow x_{n+1} \in [-1, 3],$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Așadar $x_0 \in [-5, 2]$, $x_2, x_3, \dots \in [-1, 3]$, deci $x_n \in [-5, 3]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Șiruri monotone

Definiție. Șirul (a_n) este

- **crescător**, dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $a_n \leq a_{n+1}$;
- **strict crescător**, dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $a_n < a_{n+1}$;
- **descrescător**, dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $a_n \geq a_{n+1}$;
- **strict descrescător**, dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $a_n > a_{n+1}$.

Definiție. Șirul (a_n) este

- **monoton**, dacă (a_n) este crescător sau descrescător;
- **strict monoton**, dacă (a_n) este strict crescător sau strict descrescător.

Exemplu. Șirul (a_n) cu termenul general $a_n = 1 + 2 + \dots + n$ este strict crescător.

Șirul (b_n) , $b_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ($[A]$ înseamnă partea întreagă a lui A) este crescător.

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n = \frac{1}{n}$ este strict descrescător.

4. Funcții

4.1. Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că am definit o **funcție** pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă fiecărui element din A este asociată un singur element din B . Mulțimea A se numește **domeniul de definiție**, B este **mulțimea de valori** sau **codomeniul** funcției.

Notatie. Dacă f este o funcție definită pe A cu valori în B , atunci se scrie: $f : A \rightarrow B$. Dacă elementului x din A este asociată elementul $y \in B$, se scrie

$x \xrightarrow{f} y$ sau $y = f(x)$ și se spune că “ y este imaginea elementului x din A prin funcția f ”.

Exemplu. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{5, 6\}$. Asocierea $x \xrightarrow{f} x + 4$ nu este o funcție $A \rightarrow B$, pentru că $3 \xrightarrow{f} 7 \notin B$.

Fie mulțimile $A = \{1, 2, 4\}$ și $B = \mathbb{R}$. Asocierea “ $x \mapsto y$, unde $y^2 = x$ ” nu definește o funcție $A \rightarrow B$, pentru că elementului $x = 1$ din A corespund mai multe valori din B : $y_1 = 1 \in B$ și $y_2 = -1 \in B$ satisfac relația $y_1^2 = y_2^2 = 1$. Relația $A \rightarrow \mathbb{R}_+$, “ $x \mapsto y$, unde $y^2 = x$ ” este o funcție: $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto \sqrt{2}$, $4 \mapsto 2$.

Dacă A și B sunt mulțimi de numere, o funcție $f : A \rightarrow B$ se numește **numerică**.

Definiție. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $C \subseteq A$. Funcția

$f|_C : C \rightarrow B$, $f|_C(x) = f(x)$, $\forall x \in C$ se numește **restricția lui f la mulțimea C** .

Exemplu. Fie funcția $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $x \mapsto x + 4$. Domeniul lui g este $\{1, 2, 3\}$, codomeniul este $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$. Restricția lui g la mulțimea $\{1, 2\}$ este funcția $h = g|_{\{1, 2\}}$, $h : \{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $h(1) = 5$, $h(2) = 6$.

O funcție este definită de următoarele trei “componente”: domeniul de definiție (A), mulțimea de valori (B) și legea care leagă cele două mulțimi.

Definiție. Funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ sunt **egale**, dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (punctual funcțiile coincid).

Exemplu. Funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{f} |x|$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{g} \sqrt{x^2}$ sunt egale: domeniile de definiție și codomeniile coincid, iar $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Modalități de a defini o funcție

Funcția f este definită **sintetic**, dacă fiecărui element x al domeniului este dat în mod explicit elementul $y = f(x) \in B$ - de obicei, această modalitate este folosită când domeniul are un număr mic de elemente:

- diagrama Venn-Euler (diagrama cu săgeți),
- tabelul de valori,
- graficul funcției.

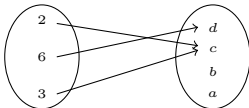
Funcția f este definită **analitic**, dacă legea de corespondență este dată printr-o formulă sau o proprietate:

- funcție definită pe baza unei formule,
- funcție definită cu ajutorul mai multor formule (funcții multiforme),
- funcție definită cu ajutorul unei formule recursive.

Exemplu.

Diagrama alăturată reprezintă funcția f pentru care

$$A = \{2, 6, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, 2 \xrightarrow{f} c, 3 \xrightarrow{f} c, \\ 6 \xrightarrow{f} d$$



Tabelul

x	2	3	4
$g(x)$	11	2	11

 definește funcția g pentru care domeniul este $A = \{2, 3, 4\}$, codomeniul este $B = \{2, 11\}$, $2 \xrightarrow{g} 11$, $3 \xrightarrow{g} 2$, $4 \xrightarrow{g} 11$.

Graficul $G_h = \{(a, 3), (b, 4), (c, 4), (d, 5)\}$ definește funcția h al cărei domeniu este $A = \{a, b, c, d\}$, codomeniul este $B = \{3, 4, 5\}$ și $a \xrightarrow{h} 3$, $b \xrightarrow{h} 4$, $c \xrightarrow{h} 4$, $d \xrightarrow{h} 5$.

Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ definește funcția f , funcție care fiecărui element $a \in (0, \infty)$ îi asociază numărul a^2 : de exemplu, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(11) = 11^2 = 121$, dar ~~$f(-5)$~~ nu are sens pentru că $-5 \notin (0, \infty)$.

4.2. Operații cu funcții numerice

Adunarea funcțiilor

Definiție. Fie A o mulțime nevidă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții. **Suma funcțiilor** f și g este funcția $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

Notăție. Suma funcțiilor f și g se notează cu $f + g$, deci $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

Observație. Suma este definită numai în cazul funcțiilor cu domenii de definiție egale. Operația care asociază unei perechi de funcții suma funcțiilor se numește **adunarea funcțiilor**.

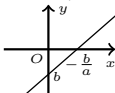
5. Funcții numerice, ecuații

5.1. Funcția de gradul întâi

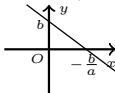
Definiție. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește **funcția de gradul întâi**.

Reprezentarea geometrică a funcției de gradul întâi este o dreaptă.

Dacă $a > 0$:



Dacă $a < 0$:



Tabelul de variație și de semn

$f(x) \setminus x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	0	$+\infty$
dacă $a > 0$	$-\infty$	$-$	0	$+$
dacă $a < 0$	$+\infty$	$+$	0	$-$

Problemă. Fie f o funcție de gradul întâi. Să se demonstreze că funcția $f \circ f$ este strict creștătoare!

S. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(ax + b) = a(ax + b) + b = \\ &= a^2x + (ab + b) \end{aligned}$$

o funcție de gradul întâi. Coeficientul lui x (a^2) fiind po-

zitiv, f este strict crescătoare.

Problemă. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (3 - m^2)x + 3$!

S. Funcția f fiind de gradul întâi, f este strict crescătoare dacă și numai dacă coeficientul lui x este strict pozitiv:
 $3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Problemă. Să se determine funcția de gradul întâi al cărei grafic trece prin punctele $A(2, 7)$ și $B(-3, -18)$.

S. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$A, B \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 7, f(-3) = -18 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ -3a + b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$$

Deci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$.

Proprietățile funcției de gradul întâi

Definiție	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Imaginea lui f	$Im f = \mathbb{R}$
Puncte de inter-	$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$
secție cu axele	$G_f \cap Ox = \left\{\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$
Periodicitate	nu este periodică
Paritate	dacă $b = 0$, f este impară, centru de simetrie: O dacă $b \neq 0$, f nu este pară, nu este impară
Continuitate	continuă pe $\mathbb{R}$

Proprietățile funcției de gradul întâi (cont.)

Asimptote	asimptotă oblică la $\pm\infty$: $y = ax + b$
Mărginire	nu este mărginită
Monotonie	dacă $a > 0$, f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $a < 0$, f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$
Semnul funcției	dacă $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ dacă $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$
Bijectivitate	f este bijectivă
Funcția inversă	$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$

Problemă. Să se traseze graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

S. f fiind o funcție de gradul întâi, graficul lui f este o dreaptă.

5.4. Ecuații de gradul al doilea

Definiție. O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește **ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali**.

Fie $\Delta = b^2 - 4ac$ **discriminantul ecuației**:

- dacă $\Delta < 0$, ecuația nu admite soluții reale;
- dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația admite o singură soluție reală (două soluții egale):

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a};$$

- dacă $\Delta > 0$, ecuația admite două soluții reale distincte:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Teoremă. (Descompunerea expresiei de gradul al doilea în produs) Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

S. Coeficienții ecuației sunt: $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$, așadar $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$, deci ecuația admite două soluții:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3}.$$

Problemă. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația următoare să admită o singură soluție reală:
 $mx^2 - (m+3)x + 4 = 0$.

S. $a = m$, $b = -(m+3)$, $c = 4$, deci $\Delta = m^2 - 10m + 9$. Ecuația are o singură soluție reală dacă $\Delta = 0$:
 $m^2 - 10m + 9 = 0 \Rightarrow \Delta_m = 100 - 36 = 64$,
 $m_1 = 9$, $m_2 = 1$.

Relațiile lui Viéte

Teoremă. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației
 $ax^2 + bx + c = 0$. Atunci

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Consecință. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației
 $ax^2 + bx + c = 0$, atunci

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= S^2 - 2P, \\ \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{1} &= \frac{S^2 - 2P}{1}, \\ x_1^3 + x_2^3 &= S \cdot (S^2 - 3P), \\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &= \frac{S^2 - 2P}{P^2}. \end{aligned}$$

Relațiile lui Viéte (continuare)

Cu notația $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$ avem relația de recurență:

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, \forall n \geq 3.$$

Problemă. Fără a rezolva ecuația, să se calculeze $x_1 + x_1 x_2 + x_2$, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$, $x_1^4 + x_2^4$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 1 = 0$.

S. Folosind relațiile lui Viéte, $S = x_1 + x_2 = 3$,

$$P = x_1 \cdot x_2 = 2.$$

$$x_1 + x_1 x_2 + x_2 = S + P = 5,$$

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S \cdot P = 6.$$

Pentru a calcula suma $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \geq 3$, calculăm rând pe rând valoarea lui $S_1 = x_1 + x_2 = S$, $= x_1^2 + x_2^2, \dots, S_n = x_1^n + x_2^n$:

$$S_1 = 3, S_2 = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 5.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \text{ soluție} \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1 \Rightarrow \\ x_2 \text{ soluție} \Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 - 3x_1^2 + x_1 = 0 \\ \Rightarrow x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = 3 \cdot 5 - 3 = 12.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \text{ soluție} \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1^2 \Rightarrow \\ x_2 \text{ soluție} \Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1^4 - 3x_1^3 + x_1^2 = 0 \\ \Rightarrow x_2^4 - 3x_2^3 + x_2^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 - 3(x_1^3 + x_2^3) + (x_1^2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = 3 \cdot 12 - 5 = 31.$$

Semnul rădăcinilor ecuației de gradul al doilea

Pe baza relațiilor lui Viéte pot fi determinate semnele rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea fără rezolvarea ecuației:

	$S < 0$	$S > 0$
$P < 0$	$x_1 < 0, x_2 > 0$	
$P \geq 0$	$x_1, x_2 \leq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$

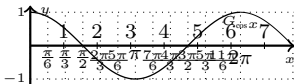
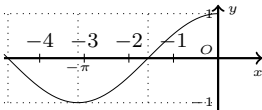
Exemplu. Fie ecuația $3x^2 - 15x + 5 = 0$. Atunci
 $S = 5 > 0, P = \frac{5}{3} > 0$, deci $x_1, x_2 > 0$.

Teoremă. Ecuația de gradul al doilea ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 , este $x^2 - Sx + P = 0$, unde $S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$.

5.15. Funcția cosinus

Definiție. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ se numește **funcția cosinus**.

Reprezentarea geometrică a graficului:



Valori remarcabile

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Tabelul de variație

x	$-\pi$	0	π	2π	3π
$\cos x$	-1	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$

Tabelul de semne

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos x$	0	$-$	0	$+$	0

Proprietățile funcției cosinus

Definiție	$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$ $f(x) = \cos x$
Imaginea lui f	$Im f = [-1, 1]$
Puncte de intersecție cu axe	$G_f \cap Oy = \{(0, 1)\}$ $G_f \cap Ox =$ $= \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Periodicitate	periodică, perioada principală $T = 2\pi$
Paritate	f este pară: $\cos(-x) = \cos x,$ axa de simetrie: Oy
Continuitate	curbă continuă
Asimptote	nu există

Proprietățile funcției cosinus (continuare)

Mărginire	f este mărginită: $-1 \leq \cos x \leq 1,$ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,$ $\cos x = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow = (2k+1)\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$
Monotonitate	f este strict crescătoare $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ -n, f este strict descrescătoare $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ -n, $k \in \mathbb{Z}$
Semnul funcției	$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in$ $\in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ și $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in$ $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
Convexitate	f este convexă pe $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ f este concavă pe $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ Puncte de inflexie: $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Bijectivitate	f nu este bijectivă (nu e injectivă, f e surjectivă)
Restricția bijectivă	$f_b : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1],$ $f_b(x) = \cos x$